

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.А.ДЖАФАРОВ

**«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА»**

Новосибирск, 2015 год

УДК

Д

Рецензенты:

канд.физ.-мат.наук, доцент кафедры высшей математики
Новосибирского государственного технического
университета *А.П.Ковалевский*

канд.физ.-мат.наук, ученый секретарь института систем
информатики им.А.П.Ершова СО РАН *Ф.А.Мурзин*

Джафаров К.А.

Д Теория вероятностей и математическая
статистика: учебное пособие/ К.А.Джафаров. –
Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. - с.

ISBN

Настоящее учебное пособие написано в соответствии с требованиями ФГОС к дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Данный курс предназначен для студентов экономических специальностей. Здесь затронуты классические темы данного курса, такие, как: случайные события и их вероятности, случайные величины и их распределения, элементы математической статистики.

УДК

©Джафаров К.А., 2015
©Новосибирский государственный
Технический университет

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. События и их вероятности

1.1. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностные пространства.

1.1.1. Случайные события. Операции над ними

1.1.2. Вероятности

1.1.3. Свойства вероятностей

Задачи к 1.1

1.2. Схема равновозможных исходов

1.2.1. Классическая вероятность

1.2.2. Элементы комбинаторики

1.2.3. Геометрическая вероятность

1.2.4. Гипергеометрическое распределение

Задачи к 1.2

1.3. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

1.3.1. Условные вероятности

1.3.2. Формула полной вероятности

1.3.3. Формулы Байеса

Задачи к 1.3

1.4. Независимость случайных событий

1.4.1. Независимость двух событий

1.4.2. Независимость многих событий

Задачи к 1.4

1.5. Дополнительные задачи к Главе 1

Глава 2. Случайные величины и их распределения

2.1. Случайные величины со значениями в $\mathbb{R}^1$

2.1.1. Случайные величины

2.1.2. Функция распределения

2.1.3. Свойства функции распределения

Задачи к 2.1

2.2. Дискретный и непрерывный типы распределений

2.2.1. Дискретная случайная величина

2.2.2. Непрерывная случайная величина

2.2.3. Примеры случайных величин

Задачи к 2.2

2.3. Функция от случайной величины

Задачи к 2.3

2.4. Случайные величины со значениями в $\mathbb{R}^n$

2.4.1. Случайные векторы

2.4.2. Дискретные и непрерывные двумерные случайные величины

2.4.3. Независимость случайных величин

Задачи к 2.4

2.5. Испытания Бернулли

2.5.1. Основные определения

2.5.2. Формула Бернулли

2.5.3. Теоремы Муавра-Лапласа

2.5.4. Теорема Пуассона

Задачи к 2.5

2.6. Числовые характеристики случайных величин

2.6.1. Математическое ожидание случайной величины

2.6.2. Дисперсия случайной величины

2.6.3 Примеры вычисления математического ожидания и дисперсии

2.6.4. Коэффициент корреляции случайных величин

Задачи к 2.6

2.7. Предельные теоремы теории вероятностей

2.7.1. Сходимость последовательности случайных величин по вероятности

2.7.2. Закон больших чисел

2.7.3. Центральная предельная теорема

Задачи 2.7

2.8. Дискретные цепи Маркова

2.8.1. Определения

2.8.2. Уравнение Колмогорова-Чепмена

2.8.3. Эргодичность. Стационарные вероятности

2.8.4. Классификация состояний цепи Маркова

Задачи к 2.8

2.9. Дополнительные задачи к Главе 2

Глава 3. Элементы математической статистики

3.1. Введение. Основные понятия математической статистики

3.1.1. Выборка, основные задачи математической статистики

3.1.2. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма выбоки

3.1.3. Выборочные характеристики случайной величины

Задачи к 3.1

3.2. Примеры параметрических семейств распределений

3.3. Оценивание неизвестных параметров

3.3.1. Оценка. Определение

3.3.2. Свойства оценок

Задачи к 3.3

3.4. Методы получения оценок

3.4.1. Метод моментов

3.4.2. Метод максимального правдоподобия

Задачи 3.4

3.5. Сравнение оценок. Неравенство Рао – Крамера

3.5.1. Среднеквадратический подход

3.5.2. Асимптотический подход

3.5.3. Неравенство Рао - Крамера

3.6. Построение доверительных интервалов

Задачи к 3.6

3.7. Проверка статистических гипотез

3.7.1. Основные понятия

3.7.2. Принцип Неймана-Пирсона построения критериев. Лемма Неймана - Пирсона

3.7.3. Примеры критериев для проверки гипотез

Задачи к 3.7

3.8. Линейная регрессия между двумя случайными величинами

3.8.1. Задача о наименьших квадратах

3.8.2. Задача о линейной регрессии

Задачи к 3.8

3.9. Дополнительные задачи к Главе 3

Приложения

Список литературы

ВВЕДЕНИЕ

Данный курс читается для студентов первого и второго курсов факультета Бизнеса по направлениям «Экономика» и «Менеджмент».

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» является базовым для экономических специальностей. Важнейшими свойствами социально-экономических систем являются случайность и неопределенность в развитии экономических явлений, массовый характер экономических явлений и процессов. Поэтому экономические явления и процессы носят в основном вероятностный характер, и для их изучения необходимо применение экономико-математических моделей на базе теории вероятностей и математической статистики.

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать цели данного курса:

- А) научить студентов-экономистов при исследовании социально-экономических явлений учесть не только основные факторы, но и множество второстепенных факторов, приводящих к случайным возмущениям и искажениям результата.
- Б) научить студентов при исследовании экономических явлений пользоваться специальными – вероятностными методами.
- В) изучить закономерности массовых случайных явлений, прогнозировать их характеристики, влиять на ход этих явлений, контролировать их, ограничивать область действия случайности.

ГЛАВА 1. СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностные пространства

1.1.1. Случайные события. Операции над ними

Случайное событие является одним из основных понятий теории вероятностей и связано с проведением некоторого эксперимента. Под экспериментом следует понимать выполнение определенного комплекса условий. Возможный набор исходов эксперимента $\Omega = \{\omega\}$ будем называть *пространством элементарных событий*. Точки или элементы этого пространства называются *элементарными исходами* или *элементарными событиями*.

Пример 1. Самый простой эксперимент имеет два исхода. Например, бросание монеты, где исходами являются выпадение «герба» или выпадение «решетки»; испытание промышленных изделий на «дефектность» или «годность», относятся к таким экспериментам. Здесь исходы обозначаются символами 0 и 1. Обычно их называют *неудачей* и *успехом*, соответственно. Пространство элементарных событий Ω состоит из двух точек: $\Omega = \{0,1\}$.

Пример 2. А) Бросание правильной игральной кости один раз, где исходом является число очков (от 1 до 6) на выпавшей грани — пример эксперимента с большим числом исходов. Здесь возможные исходы образуют множество $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

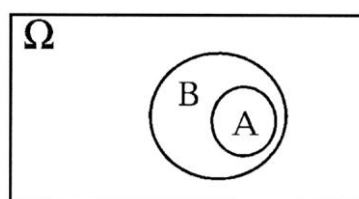
Б) Бросание игральной кости дважды, где исходами являются пары (i,j) — число очков на выпавшей грани, соответственно, первой и второй кости. Здесь $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$.

Пусть $A \in \Omega$ — произвольное подмножество пространства элементарных событий Ω для некоторого эксперимента. Проведение эксперимента сводится к наблюдению элементарного исхода ω , которое является элементом Ω . Если $\omega \in A$, то говорят, что *произошло событие A* . Если же это не так, то говорят, что *событие A не произошло*.

Событие, отвечающее всему множеству Ω элементарных исходов, называется *достоверным* (оно происходит всегда, так как $\omega \in \Omega$ при любом исходе ω). Событие, отвечающее пустому множеству $\emptyset$, называется *невозможным* (оно не происходит ни при каком исходе эксперимента).

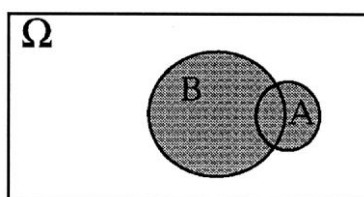
Для лучшего восприятия следующих понятий мы воспользуемся так называемой *диаграммой Венна*. Все пространство Ω будем изображать прямоугольником, каждое элементарное событие ω будет соответствовать некоторой точке прямоугольника, а каждое событие A — некоторой области A , принадлежащей прямоугольнику.

Определение 1. Будем говорить, что событие A содержится в событии B (или A влечет за собой B) (обозначение: $A \subseteq B$), если любое элементарное событие ω из A входит в B .



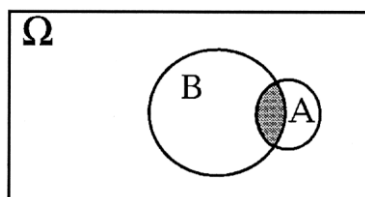
Определение 2. События A и B совпадают или равны ($A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Определение 3. Объединением (суммой) двух событий A и B ($A \cup B$) будем называть событие, состоящее из элементарных событий, которые входят или в A или в B .



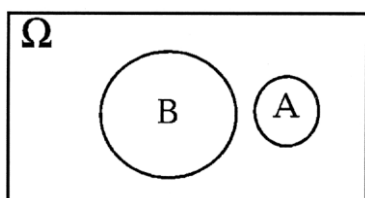
Замечание 1. Из определения 3 вытекает, что сумма событий $A \cup B$ есть событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B .

Определение 4. Пересечением (произведением) двух событий A и B ($A \cap B$) будем называть событие, состоящее из элементарных событий, которые входят и в A , и в B .

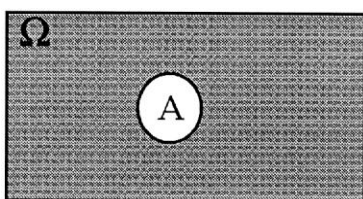


Замечание 2. Пересечение событий $A \cap B$ есть событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят совместно оба события A и B .

Определение 5. События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \emptyset$ (т.е. пересечение A и B есть невозможное событие).

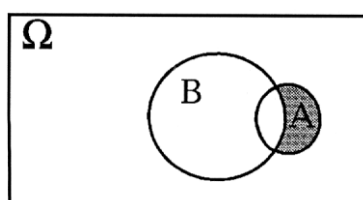


Определение 6. Дополнением ($\bar{A}$) к событию A (или противоположным к A) называется событие, состоящее из тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые не входят в A .



Замечание 3. Дополнение $\bar{A}$ есть событие, которое происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит.

Определение 7. Разностью между событиями A и B ($A \setminus B$) будем называть событие, состоящее из тех элементарных событий, которые входят в A , но не входят в B .



Замечание 4. Разность событий $A \setminus B$ есть событие, которое происходит тогда и только тогда, когда событие A происходит, а событие B не происходит.

Множество $\{A_i\}$ называют *счетным*, если элементы этого множества можно сопоставить со всеми натуральными числами, т.е. можно занумеровать в бесконечную последовательность $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. Множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Определим следующие операции.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ - это событие, заключающееся в осуществлении хотя бы одного

из событий $A_1, A_2, \dots$; и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ - это событие, заключающееся в осуществлении всех событий $A_1, A_2, \dots$ одновременно.

Предположим теперь, что F — система всех событий. Допустим, что эта система удовлетворяет некоторым условиям:

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) если $A \in F$, то $\bar{A} \in F$,

3) если $A_1, A_2, \dots \in F$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Определение 8. Система событий F , удовлетворяющая вышеприведенным условиям, называется σ -алгеброй событий.

1.1.2. Вероятности

Пусть некоторый эксперимент повторяется n раз (т.е. проводится серия из n одинаковых и независимых друг от друга экспериментов). Фиксируем случайное событие A и предполагаем, что это событие появлялось $\nu_n(A)$ раз. Рассмотрим отношение $\nu_n(A)/n$, которое называется *частотой* события A в данной серии. С ростом n колебания этого отношения вокруг некоторого постоянного числа $P(A)$ все меньше и в различных сериях практически совпадают при больших n , т.е. $\nu_n(A)/n \approx P(A)$. Итак, событию A сопоставляется численная характеристика $P(A)$, которая и называется *вероятностью* события A . Такую трактовку понятия вероятности называют *частотным* или *статистическим* определением вероятности.

Теперь приведем **аксиомы** теории вероятностей.

Пусть Ω — пространство элементарных событий, F — σ -алгебра событий, $\mathbb{R}^1$ — пространство действительных чисел.

Определение 1. Вероятностью называют числовую функцию $P(A)$, определенную на σ -алгебре событий F , т.е. $P : F \rightarrow \mathbb{R}^1$, которая удовлетворяет следующим аксиомам.

Аксиома 1. Для любого события A из F число $P(A) \geq 0$.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события Ω равна 1, т.е. $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — счетная последовательность попарно несовместных событий, т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$, тогда

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Определение 2. Вероятностным пространством называется тройка объектов $(\Omega, F, \mathbf{P})$, где Ω — непустое пространство элементарных событий, F — σ -алгебра событий из Ω , $\mathbf{P}$ — вероятность, определенная на F .

В дальнейшем, для удобства записи, знак суммы $\sum_{n=1}^{\infty}$ будем записывать как $\sum_n$ или Σ_n , а знаки $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ — как $\bigcup_n$ или $\bigcup_n$; $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ — как $\bigcap_n$ или $\bigcap_n$.

1.1.3. Свойства вероятностей.

$$1. \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

Так как события $\emptyset$ и Ω несовместны, то согласно аксиоме 3 $\mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}(\Omega)$, и по аксиоме 2 получаем требуемое.

$$2. \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Поскольку $\Omega = A \cup \bar{A}$ и $A, \bar{A}$ несовместные события, то по аксиоме 3 получаем

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}).$$

$$3. \text{ Если } A \subseteq B, \text{ то } \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A).$$

Пусть $B \setminus A = C$, тогда $C \cap A = \emptyset$ и $C \cup A = B$. Отсюда согласно аксиоме 3 получим

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A).$$

4. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Из свойства 3 следует, что $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0$. Отсюда получаем требуемое.

5. Для любого события A из F имеет место $0 \leq P(A) \leq 1$.

Поскольку $A \subseteq \Omega$, то согласно свойству 4 $P(A) \leq P(\Omega)$. Следовательно $P(A) \leq 1$.

6. Для произвольных событий A и B из F имеет место равенство

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Эта формула называется *формулой сложения вероятностей для двух произвольных событий*.

Пусть $B \setminus A = C$, тогда $C \cap A = \emptyset$. Отсюда $A \cup B = A \cup C$ и по аксиоме 3 и свойству 3

$$P(A \cup B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

поскольку $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ и $A \cap B \subset B$.

7. Для произвольных событий A и B из F имеет место

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Это свойство является очевидным следствием свойства 6.

Приведем без доказательств еще три свойства (доказательств этих свойств можно найти в [1]).

8. Для последовательности событий $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ справедливо

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

9. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — последовательность событий, то имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{P}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbf{P}(A_n).$$

10. **Лемма непрерывности.** Пусть имеется последовательность событий $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $A_n \in F$ и $A_{n+1} \subseteq A_n$ (т.е. убывающая последовательность). Обозначим через A пересечение всех A_n : $A = \bigcap_n A_n$.

Тогда имеет место следующее равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A).$$

Задачи к 1.1

1. Фирма по продаже автомобилей рекламирует две новые модели машин по радио и телевидению. Компанию интересует эффективность рекламы, в частности, оценка того, что случайно выбранный человек имеет представление хотя бы об одной из двух рекламируемых моделей. Определим событие A как событие, состоящее в том, что случайно выбранный человек слышал рекламу по радио, а событие B — как событие, состоящее в том, что случайно выбранный человек знает о новых моделях автомобилей из рекламы телевидения. Определить в этом контексте $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $\bar{A}$.

2. Брокерская фирма имеет дело с акциями и облигациями. Для анализа деятельности фирме полезно оценить вероятность того, что лицо, интересующее фирму, является держателем акций (событие A) или облигаций (событие B). Определите в этом контексте $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$.

3. С помощью операций запишите события, состоящие в том, что из событий A , B и C а) все три произошли; б) B произошло, а A и C нет; в) по крайней мере одно произошло; г) ни одно не произошло.

4. В ходе исследования потребительского рынка проводили опрос потребителей. В частности, один из вопросов касался сорта зубной пасты, которую использует потребитель. Если известно, что 14% населения использует сорт A , а 9% - сорт B , то чему равна вероятность того, что случайно выбранный человек будет использовать одну из двух паст. (Предполагается, что в данный момент человек использует только одну пасту).

5. В фирме 1000 работников, 550 из них имеют высшее образование, а 420 – среднее специальное, 365 сотрудников имеют и высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное, или высшее образование, или и то и другое.

6. Вероятность правильного оформления счёта на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счёта. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

7. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, от второго – 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.

1.2. Схема равновозможных исходов

1.2.1. Классическая вероятность.

Определение. События $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ образуют полную систему (или группу) событий, если 1) $\bigcup_n E_n = \Omega$; 2) $E_i \cap E_j = \emptyset$ для $i \neq j$

Пусть события $E_1, E_2, \dots, E_n$ образуют полную систему. Рассмотрим событие $A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \dots \cup E_{i_k}$, тогда будем говорить, что событию A благоприятствуют k из n событий E_i .

Теорема. Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n$ образуют полную систему событий и равновероятны (или равновозможны), и пусть событию A благоприятствуют k из этих n событий, тогда

$$P(A) = k/n.$$

Доказательство. Так как $E_1, E_2, \dots, E_n$ образуют полную систему событий, то $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \Omega$. Тогда, по аксиомам 3 и 2 получаем:

$$1 = P(\Omega) = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i).$$

По условию теоремы $P(E_i)$ — одна и та же для всех i , что нам дает $P(E_i) = 1/n$ для любого i . Поскольку $A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \dots \cup E_{i_k}$, то по аксиоме 3 получаем $P(A) = k/n$.

Пример. В урне имеются k белых и $n - k$ красных шаров. Извлекается из урны 1 шар. Какова вероятность того, что этот шар белый? Все исходы равновероятны, их всего n : $E_1, E_2, \dots, E_n$. Событию $A = \{\text{извлеченный шар белый}\}$ благоприятствуют k из n исходов, поэтому из теоремы следует ответ: $P(A) = \frac{k}{n}$.

1.2.2. Элементы комбинаторики

Пусть имеется n различных объектов, например, шары, занумерованные цифрами $1, 2, \dots, n$. Такой набор называется *генеральной совокупностью объема n* . Выберем k элементов из генеральной совокупности объема n .

Имеются 2 способа выборки: *выборка без возвращения* и *выборка с возвращением*.

Обозначим A_n^k - число различных выборок без возвращения объема k из генеральной совокупности объема n , которые различаются по составу элементов, а при одинаковом составе — порядком следования элементов в выборке, C_n^k - число различных выборок без возвращения объема k из генеральной совокупности объема n , которые различаются по составу элементов. A_n^k называется *числом размещений из n элементов по k* , а — C_n^k *числом сочетаний из n элементов по k* .

Число A_n^k – для произвольных n и k определяется так: выбираем сначала любой из n элементов, затем выбираем любой из $n - 1$ оставшихся элементов, и т.д. Поэтому

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

При $k = n$ число размещений совпадает с *числом перестановок* из n элементов, которое обозначается:

$$P_n = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Заметим, что сочетание от размещения отличается только тем, что входящие в него элементы неупорядочены. Поскольку k элементов можно упорядочить $k!$ способами, то получаем, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Обозначим B_n^k – число различных выборок с возвращением объема k из генеральной совокупности объема n , которые различаются по составу элементов и порядком их следования. Легко убедиться в том, что $B_n^k = n^k$.

Отметим также, что число различных выборок с возвращением объема k из генеральной совокупности объема n , которые различаются только по составу элементов определяется как C_{n+k-1}^k .

Пример 1. Игральную кость бросаем дважды. Нас интересует вероятность события $A = \{\text{сумма очков равна } 6\}$. Общее число исходов равно $B_6^2 = 6^2 = 36$. Число исходов, благоприятствующих к событию A подсчитывается элементарно: (1,5), (5,1), (2,4), (4,2) и (3,3), т.е. их всего 5. Тогда $P(A) = 5/36$.

Пример 2. Технический контроль проверяет изделия из партии, состоящей из m изделий первого сорта и n изделий второго сорта. Проверка

$$P(A) = 1 - \frac{C_m^2}{C_{n+m-k}^2}.$$

первых k ($k \leq n$) изделий, выбранных из партии наугад, показала, что все они второго сорта. Найдем вероятность события $A = \{\text{среди следующих двух наугад выбранных изделий из числа непроверенных по меньшей мере одно изделие окажется второго сорта}\}$. Сначала найдем вероятность противоположного события $\bar{A} = \{\text{среди следующих двух наугад выбранных изделий из числа непроверенных нет ни одного изделия второго сорта}\}$. Общее число исходов выбора двух изделий из числа непроверенных равно C_{n+m-k}^2 , поскольку после первого контроля непроверенных изделий осталось $n + m - k$. Число исходов, благоприятствующих событию $\bar{A}$ равно C_m^2 , поскольку оба изделия первого сорта. Тогда $P(\bar{A}) = C_m^2 / C_{n+m-k}^2$.

Пример 3. Телефонный номер состоит из шести цифр. Найдем вероятность события $A = \{\text{все цифры в номере различны}\}$. Число всех

шестизначных телефонных номеров, включая 00-00-00 и 99-99-99, равно $V_{10}^6 = 10^6$. Число же номеров с различными цифрами равно $A_{10}^6 = 10!/(10-6)! = 10!/4!$. Теперь найдем искомую вероятность $P(A) = 10!/4! \cdot 10^6 = 0,1512$.

1.2.3. Геометрическая вероятность

Применение формулы классической вероятности ограничивается только случаями, когда число исходов проводимого эксперимента можно перечислить. Как же вычислить вероятности событий, когда этого делать нельзя (т.е. когда множество исходов эксперимента несчетно)? В некоторых случаях это можно сделать, пользуясь геометрическим языком. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ некоторая ограниченная область n -мерного пространства. Например, на прямой (в $\mathbb{R}^1$) — это может быть отрезок; на плоскости (в $\mathbb{R}^2$) — прямоугольник и т.д. Предполагается, что область G имеет меру $\mu(G)$ (длину в $\mathbb{R}^1$, площадь в $\mathbb{R}^2$ и т.д.) такую, что $0 < \mu(G) < \infty$.

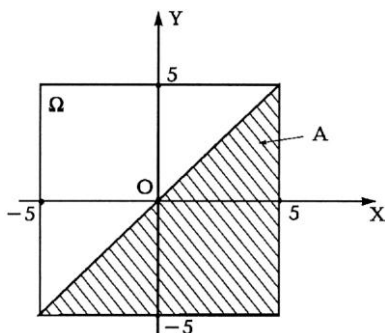
В область G наугад бросается точка. Этому выражению следует придать определенный смысл: *брошенная точка может попасть в любую точку области G , вероятность попасть в какую либо часть g области G пропорциональна мере этой части и не зависит от ее расположения и формы, т.е. $P(\text{попасть в } g) = k \cdot \mu(g)$, где k - коэффициент пропорциональности. Тогда $P(\text{попасть в } G) = k \cdot \mu(G)$ и поскольку событие (*попасть в G*) — достоверное, то отсюда получим (используя аксиому 2 вероятности): $k = 1/\mu(G)$.*

Вероятность попасть в g , вычисленная вышеописанным способом, носит название *геометрической вероятности* и определяется так:

$$P(\text{попасть в } g) = \frac{\mu(g)}{\mu(G)}.$$

Пример (Задача о встрече). Предположим, что два человека условились встретиться в 17.00 часов. У каждого встречающегося часы могут ошибаться ± 5 минут. В пределах от -5 до $+5$ любая ошибка возможна.

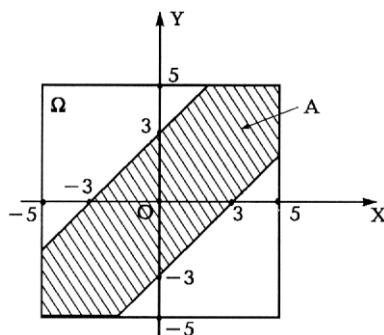
Множество элементарных событий Ω можно представить в следующем виде: $\Omega = \{(X, Y) : -5 \leq X \leq 5, -5 \leq Y \leq 5\}$, где X — величина ошибки (время) в часах первого человека, а Y — в часах второго человека, выраженные в



минутах. Нас интересует вероятность события $A = \{\text{встреча состоялась}\}$. В зависимости от того, каковы условия договоренности этих людей, задача решается по-разному. Например, пусть они договорились о том, что каждый после прихода ждет 3 минуты. При этом встреча может состояться только тогда, когда выполнено следующее условие: $|X - Y| \leq 3$. Итак, событие A интерпретируется следующим образом: $A = \{(X, Y) : |X - Y| \leq 3\}$. Событию A соответствует заштрихованная область на рисунке.

Теперь нам остается воспользоваться определением геометрической вероятности: $P(A) = \mu(A) / \mu(\Omega)$. Элементарные вычисления показывают, что $\mu(A) = 100 - 7 \cdot 7 = 51$, $\mu(\Omega) = 100$, и поэтому $P(A) = 51/100$.

Теперь предположим, что они договорились о том, что первый приходит и не ждет ни секунды, а второй ждет. При этих условиях встреча может состояться только при выполнении следующего условия: $X \geq Y$. Тогда событие A выглядит так: $A = \{(X, Y) : X \geq Y\}$



Воспользовавшись определением геометрической вероятности, находим $P(A) = \mu(A) / \mu(G) = 1/2$.

1.2.4. Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется n шаров, среди которых n_1 белых и n_2 черных ($n = n_1 + n_2$). Выберем k элементов без возвращения. Нас интересует вероятность события $A = \{\text{среди выбранных окажется } k_1 \text{ белых и } k_2 \text{ черных шаров (} k = k_1 + k_2)\}$.

Общее число исходов есть число сочетаний из n элементов по k , т.е. C_n^k . А число исходов, благоприятствующих к событию A равно $C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}$, что объясняется просто: k_1 шаров мы можем выбрать из имеющихся n_1 белых шаров $C_{n_1}^{k_1}$ способами, а k_2 черных шаров из имеющихся n_2 черных шаров $C_{n_2}^{k_2}$ способами, при этом любой способ выбора шаров, скажем, белого цвета комбинируется с любыми способами выбора шаров черного цвета.

Тогда
$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}}{C_n^k}.$$

Определенные таким образом вероятности носят название *гипергеометрического распределения*.

Рассмотрим случай, когда среди n шаров n_1 белых, n_2 черных, ..., n_j красных шаров ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_j$). Выбираем k шаров так, чтобы среди них оказалось k_1 белых, k_2 черных, ..., k_j красных шаров ($k = k_1 + k_2 + \dots + k_j$). Событие, состоящее из таких выборок, обозначаем через A и аналогичными рассуждениями, как и в случае наличия шаров двух цветов, получаем

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{n_j}^{k_j}}{C_n^k}.$$

Пример. Из колоды в 52 карты наугад вынимаем 3 карты. Нас интересует вероятность события $A = \{\text{вынуты «тройка», «семерка», «туз»}\}$. Общее число элементарных исходов равно C_{52}^3 . Исходы, благоприятные к событию A определяются так: выбирается одна «тройка» из четырех имеющихся «троек» различных мастей, одна «семерка» из четырех имеющихся «семерок» различных мастей и один «туз» из четырех имеющихся «тузов» различных мастей. Используя вышеприведенную

формулу получаем
$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^3}.$$

Задачи к 1.2

1. Девять запечатанных пакетов с предложениями цены на аренду участков для бурения нефтяных скважин поступили утром в специальное агентство утренней почтой. Сколько существует различных способов очередности вскрытия конвертов с предложениями цены?

2. Комитет рассматривает кандидатуры шести человек, подавших заявления о приёме на работу. Все шестеро имеют одинаковые профессиональные характеристики. На интервью из шестерых будет приглашено только трое. Порядок приглашения каждого имеет значение, так как первый кандидат будет иметь лучший шанс быть приглашённым на работу; второй будет приглашён, если первому будет отказано, третий будет приглашён, если два предыдущих кандидата получают отказ. Сколько всего существует способов приглашения трёх кандидатов из шести при таком способе отбора?

3. Компания имеет четыре отдела: по производству продукции, отдел снабжения, занимающийся обеспечением сырья, а также отделы менеджмента и маркетинга. Количество людей в каждом из отделов 55, 30, 21 и 13 соответственно. Каждый отдел собирается послать одного представителя на ежегодную встречу с директором компании. Сколько

различных групп для встречи можно составить из числа работников компании?

4. Директор корпорации рассматривает заявления о приёме на работу 10 выпускников университета. На одном из предприятий корпорации имеются три различных вакансии. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?

5. Пять фирм F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 предлагают свои услуги по выполнению трёх различных контрактов C_1, C_2 и C_3 . Любая фирма может получить только один контракт. Контракты различны, т. е., если контракт C_1 получит фирма F_1 , то это не тоже самое, если фирма F_1 получит контракт C_2 . а) Сколько способов получения контрактов имеют фирмы? б) Если предположить равновозможность заключения контрактов, чему равна вероятность того, что фирма F_3 получит контракт?

6. Авиакомпания имеет 6 рейсов между Новосибирском и Москвой, а так же 2 рейса между Москвой и Барселоной. Сколькими способами можно заказать билет из Новосибирска до Барселоны, если рейсы осуществляются в разные дни?

7. Собрание, на котором присутствует 20 человек, избирает двух делегатов на две конференции. Каким числом способов это можно сделать? Сколькими способами можно отобрать двух кандидатов на одну конференцию?

8. Президент компании всегда приглашает одного из трёх вице-президентов присутствовать на наиболее важных бизнес-встречах и утверждает, что это выбор (кого-либо из троих) случаен. Однако один из вице-президентов не был уже на пяти последних встречах. Чему равна вероятность этого события, если выбор президента действительно случаен? Каков будет ваш вывод.

9. Отдел маркетинга фирмы проводит опрос для выяснения мнения потребителей по определённому типу продуктов. Известно что в местности,

где проводятся исследования, 10% населения являются потребителей интересующего фирму продукта и могут дать ему квалифицированную оценку. Компания случайным образом отбирает десять человек из всего населения. Чему равна вероятность того, что по крайней мере один человек из них может квалифицированно оценить продукт?

10. В номерах пятизвёздочного отеля установлена система электронных дверных замков. Для того чтобы открыть замок, клиент должен вставить электронную карточку в специальное отверстие. Загорающийся зелёный свет свидетельствует о том, что Вы можете повернуть ручку двери и войти; жёлтый свет – сигнал того, что дверь заперта изнутри и Вы не можете войти. Персонал отеля по опыту знает следующее: когда дверь закрыта (не заперта изнутри), а клиент вставляет в отверстие электронную карточку, то одна из каждых 30 попыток даёт в результате жёлтый свет и дверь не открывается. Предположим, что каждая из попыток отпереть дверь независима от предыдущей. Чему равна вероятность того, что загорится жёлтый свет при каждой из трёх последовательных попыток отворить дверь (когда дверь не заперта изнутри)?

11. В большом универмаге установлен скрытый «электронный глаз» для подсчёта числа входящих покупателей. Когда два покупателя входят в магазин вместе и один идёт перед другим, то первый из них будет учтён электронным устройством с вероятностью 0,98, второй – с вероятностью 0,94, а оба – с вероятностью 0,93. Чему равна вероятность того, что устройство сканирует по крайней мере одного из двух входящих вместе покупателей.

12. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных сбербанков окажется в черте города: а) три; б) хотя бы один?

13. На фирме работают 8 аудиторов, из которых 3 – высокой квалификации, и 5 программистов, из которых 2 – высокой квалификации. В командировку надо отправить группу из 3 аудиторов и 2 программистов. Какова вероятность того, что в этой группе окажется по крайней мере 1 аудитор высокой квалификации, если каждый специалист имеет равные возможности поехать в командировку.

14. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известных вам магазина. Какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены?

15. Изготовлена партия из 200 изделий, в которой оказалось три бракованных. Произведена выборка из пяти изделий. Найти вероятность следующих событий: а) в выборке не будет ни одного бракованного изделия;

б) в выборке будет одно бракованное изделие?

16. Два лица условились встретиться в определённом месте между 18 и 19 часами и договорились, что пришедший первым ждёт другого в течение 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность их встречи, если приход каждого в течение указанного часа может произойти в любое время и моменты прихода независимы.

17. В точке C , положение которой на телефонной линии AB длины L равномерно, произошёл разрыв. Определить вероятность события

$A = \{\text{точка } C \text{ удалена от точки } A \text{ на расстояние, не меньшее } d\}.$

18. У сборщика имеются 10 деталей, мало отличающихся друг от друга, из них четыре – первого, по две – второго, третьего и четвёртого видов. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся первого вида, два – второго и одна – третьего?

19. Брак в продукции завода вследствие дефекта A составляет 4%, а вследствие дефекта B – 3,5%. Годная продукция завода составляет 95%. Найти вероятность того, что а) среди продукции, не обладающей дефектом A , встретится дефект B ; б) среди забракованной по признаку A продукции встретится дефект B .

20. В партии из 15 однотипных стиральных машин пять машин изготовлены на заводе A , а 10 – на заводе B . Случайным образом отобрано 5 машин. Найти вероятность того, что две из них изготовлены на заводе A .

1.2. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы

Байеса

1.3.1. Условные вероятности

Рассматриваются два случайные события A и B , и предполагается, что событие B произошло. При этом условии нас интересует вероятность события A .

Определение. Пусть A и B два случайные события, причем $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии B называется дробь

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Пример. Бросаем игральную кость один раз. Найдем вероятность выпадения двух очков, если известно, что выпало четное число очков. Обозначим через $A = \{2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда

$$A \cap B = \{2\}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{2},$$

поэтому

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}.$$

Следует отметить, что если $P(A) > 0$, то имеет смысл и

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A).$$

Из этих определений следует, что

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A/B) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B/A) \cdot \mathbf{P}(A).$$

Эти равенства называют *формулой умножения вероятностей*.

1.3.2. Формула полной вероятности

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ конечная или счетная полная система событий, $\mathbf{P}(A_i) > 0$ для любого i .

Теорема 1 (формула полной вероятности). Для любого события B справедливо равенство

$$\mathbf{P}(B) = \sum_n \mathbf{P}(B/A_n) \cdot \mathbf{P}(A_n).$$

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ образуют полную систему, то $\Omega = \cup A_n$. Поскольку $B \subset \Omega$ всегда, то $B = \Omega \cap B = (\cup_n A_n) \cap B = \cup_n (A_n \cap B)$.

Из аксиомы 3 следует, что $\mathbf{P}(B) = \sum_n \mathbf{P}(A_n \cap B)$, и по формуле умножения вероятностей далее получаем, что $\mathbf{P}(B) = \sum_n \mathbf{P}(B/A_n) \cdot \mathbf{P}(A_n)$.

Пример 1. Пусть имеются три стола, и в каждом по два ящика. Причем, в ящиках первого стола имеются только золотые монеты, в одном ящике второго стола — золотые, в другом — серебряные, а в ящиках третьего стола — только серебряные. Наугад выбирается стол и достается монета. Какова вероятность того, что она золотая?

Обозначим через $A_i, i=1, 2, 3$ события, состоящие в *выборе стола с номером i* , соответственно; $B = \{\text{вынуть золотую монету}\}$. Из условий ясно, что $\mathbf{P}(A_i) = 1/3, i = 1, 2, 3$. Подсчитаем $\mathbf{P}(B/A_1)=1, \mathbf{P}(B/A_2)=1/2, \mathbf{P}(B/A_3)=0$. Тогда по формуле полной вероятности получаем, что $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

Пример 2. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, второй — 0,1%. Найдём вероятность события $B =$

{деталь бракованная}, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго — 3000.

Обозначим $A_i = \{\text{на сборку поступила деталь с } i\text{-го автомата}\}$.

Ясно, что $A_1 \cup A_2 = \Omega$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Тогда, по формуле полной вероятности получим $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$.

Найдем $P(A_1) = \frac{2000}{5000} = 0,4$; $P(A_2) = \frac{3000}{5000} = 0,6$; $P(B/A_1) = 0,002$, $P(B/A_2) = 0,001$.

Следовательно, $P(B) = 0,4 \cdot 0,002 + 0,6 \cdot 0,001 = 0,0014$.

1.3.3. Формулы Байеса

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ конечная или счетная полная система событий, $P(A_i) > 0$ для любого i и событие B такое, что $P(B) > 0$. Тогда при любом i справедливы равенства:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_n P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$

Эти формулы называются *формулами Байеса*. Формулы очевидны, поскольку

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_n P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$

Здесь мы воспользовались формулами умножения вероятностей и полной вероятности.

Пример 1. В условиях примера 1 из 1.3.2 предположим, что мы вынули золотую монету. Какова вероятность того, что был выбран первый стол? Воспользуемся формулой Байеса.

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{\sum_{n=1}^3 P(A_n) \cdot P(B/A_n)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. В условиях примера 2 из 1.3.2 предположим, что поступившая на сборку деталь бракованная. Найдём вероятность того, что эта деталь поступила со второго автомата. По формуле Байеса

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B / A_2)}{\sum_{n=1}^2 P(A_n) \cdot P(B / A_n)} = \frac{0,001 \cdot 0,6}{0,0014} = 0,429.$$

Замечание. Формулы Байеса применяются при решении следующей задачи. Пусть до проведения эксперимента имеются n предположений (гипотез) относительно характера эксперимента: $A_1, A_2, \dots, A_n$. При этих предположениях проводится эксперимент. В результате эксперимента произошло событие B . Считаем, что до эксперимента известны вероятности $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ (или их легко можно вычислить). Эти вероятности называются *априорными* вероятностями гипотез. Известны также вероятности появления события B при условии реализации той или иной гипотезы A_i : $P(B/A_1), P(B/A_2), \dots, P(B/A_n)$. Нас интересуют вероятности после эксперимента: $P(A_1 / B), P(A_2 / B), \dots, P(A_n / B)$, которые называются *апостериорными* вероятностями гипотез. Эти вероятности вычисляются по формулам Байеса. Можно считать, что апостериорные вероятности гипотез уточняют априорные, используя информацию, полученную в результате эксперимента.

Задачи к 1.3

1. Служащий кредитного отдела банка знает что 12% фирм, бравших кредит в банке, обанкротились и не вернут кредиты по крайней мере в течение пяти лет. Он также знает, что обанкротились 20% кредитовавшихся в банке фирм. Если один из клиентов банка обанкротился, то чему равна вероятность того, что он окажется не в состоянии вернуть долг банку?

2. О двух акциях A и B известно, что они выпущены одной и той же отраслью. Вероятность того, что акция A поднимется в цене завтра, равна 0,2. Вероятность того, что обе акции A и B поднимутся завтра в цене, равна 0,12. Предположим, что Вы знаете, что A поднимется завтра в цене. Чему равна вероятность того, что и B поднимется завтра в цене?

3. Вероятность того, что покупатель, собирающийся приобрести компьютер и пакет прикладных программ, приобретёт только микрокомпьютер, равна 0,15. Вероятность, что покупатель купит только пакет программ, равна 0,1. Вероятность того, что будут куплены и компьютер, и пакет программ, равна 0,05. Чему равна вероятность того, что будут куплены или компьютер, или пакет программ, или компьютер и пакет программ вместе?

4. В магазине продаются 10 телевизоров, 3 из них имеют дефекты. Какова вероятность того, что посетитель купит телевизор, если для выбора телевизора без дефекта понадобится не более трёх попыток?

5. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний риск, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% - первого класса риска, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что : а) застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования; б) получивший вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска?

6. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй - 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что а) приобретённое изделие окажется нестандартным; б) приобретённое изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?

7. Консультационная фирма получила приглашение для выполнения двух работ от двух международных корпораций. Руководство фирмы оценивает вероятность получения заказа от фирмы A (событие A) равной 0,45. Также по мнению руководителей фирмы, в случае, если фирма заключит договор с компанией A , то с вероятностью в 90% компания B даст фирме консультационную работу. С какой вероятностью компания получит оба заказа.

8. Вся продукция цеха проверяется двумя контролёрами, причём первый контролёр проверяет 55% изделий, а второй остальные. Вероятность того, что первый контролёр пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролёром.

9. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем $\frac{3}{4}$ продукции с процентом брака 4%, вторая - $\frac{1}{4}$ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

10. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это а) сапоги, б) туфли.

11. При слиянии акционерного капитала двух фирм аналитики фирмы, получающей контрольный пакет акций, полагают, что сделка принесёт успех с вероятностью, равной 0,65, если председатель совета директоров поглощаемой фирмы выйдет в отставку; если он откажется, то вероятность успеха равна 0,3. Предполагается, что вероятность ухода в

отставку председателя составляет 0,7. Чему равна вероятность успеха сделки?

12. Транснациональная компания обсуждает возможности инвестиций в некоторое государство с неустойчивой политической ситуацией. Менеджеры компании считают, что успех предполагаемых инвестиций зависит, в частности, и от политического климата в стране, в которую предполагается вливание инвестиционных средств. Менеджеры оценивают вероятность успеха (в терминах годового дохода от субсидий в течение первого года работы) равной 0,55, если преобладающая политическая ситуация будет благоприятной; равной 0,30, если политическая ситуация будет нейтральной; равной 0,10, если политическая ситуация в течение года будет неблагоприятной. Менеджеры компании также полагают, что вероятности благоприятной, нейтральной и неблагоприятной политической ситуаций соответственно равны: 0,6; 0,2 и 0,2. Чему равна вероятность успеха инвестиций?

13. Директор фирмы имеет два списка с фамилиями претендентов на работу. В первом списке – фамилии 5 женщин и 2 мужчин. Во втором списке оказались 2 женщины и 6 мужчин. Фамилия одного из претендентов случайно переносится из первого списка во второй. Затем фамилия одного из претендентов случайно выбирается из второго списка. Если предположить, что эта фамилия принадлежит мужчине, чему равна вероятность того, что из первого списка была извлечена фамилия женщины?

14. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,67. Вероятность того, что товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,42. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение

интересующего нас периода. равна 0,35. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

1.4. Независимость случайных событий

1.4.1. Независимость двух событий

Пусть имеются два события A и B . Естественно считать, что событие A не зависит от события B , если $P(A)$ не зависит от наступления или не наступления B , т.е. если

$$P(A / B) = P(A). \quad (1.2)$$

Аналогично для независимости B от A выполняется

$$P(B / A) = P(B). \quad (1.3)$$

Используя определение условной вероятности, (1.2) и (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что независимость событий — понятие симметричное. Равенство (1.4) осмыслено, даже если $P(A)$ или $P(B)$ равны нулю.

Определение. События A и B называются независимыми, если их вероятности связаны соотношением (1.4).

Пример 1. Из колоды в 36 карт наудачу выбирается одна карта. Рассматриваются события

$A = \{\text{выбранная карта бубновой масти}\}, \quad B = \{\text{выбранная карта «туз»}\}.$

Проверим независимость событий A и B . Вычислим $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/9$, $P(A \cap B) = 1/36$, поскольку событие $A \cap B = \{\text{эта карта «бубновый туз»}\}$. Отсюда следует, что $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, т.е. события A и B независимы.

Пример 2. Рассматриваются семьи с четырьмя детьми. Возможные «исходы»: {4 мальчика}, {3 мальчика и 1 девочка}, {2 мальчика и 2 девочки}, {1 мальчик и 3 девочки}, {4 девочки}, их всего 5. «Исходы» можно считать равновероятными. Рассмотрим события

$$A = \{ \text{в наугад выбранной семье два и более мальчиков} \},$$

$$B = \{ \text{в наугад выбранной семье есть и мальчик, и девочка} \}.$$

Проверим, независимы ли эти события. Вычислим $P(A)=3/5$, $P(B)=3/5$, $P(A \cap B)=2/5$. Отсюда получаем, что $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, т.е. события A и B не являются независимыми.

Пример 3. Для повышения надежности прибора он дублируется другим таким же прибором, надежность (вероятность безотказной работы) каждого прибора равна p . При выходе из строя первого прибора происходит мгновенное переключение на второй (надежность переключающего устройства равна единице). Определим вероятность события

$$A = \{ \text{система двух дублирующих друг друга приборов надежна} \},$$

предполагая, что приборы функционируют независимо друг от друга.

Понятно, что отказ системы требует совместного отказа обоих приборов, следовательно $P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 1 - (1 - p)^2$,

где $A_i = \{i\text{-й прибор работает безотказно}\}$, $i = 1, 2$. Заметим, что во втором равенстве из приведенной цепочки использовалась независимость событий $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$.

1.4.2. Независимость нескольких событий

Что нужно, чтобы n случайных событий можно было назвать независимыми в совокупности?

Во-первых, любые два события должны быть независимыми, т.е.

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad i \neq j$$

Рассмотрим произвольные три события A_i , A_j , и A_k — они должны быть независимыми, т.е.

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i \cap A_j) \cdot P(A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k).$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что должно выполняться следующее равенство:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Определение. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются независимыми (независимыми в совокупности), если для любого конечного набора из этих событий:

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \quad k=1, \dots, n$$

выполняется равенство

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Пример. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2; второй вызов — 0,3; третий вызов — 0,4. По условиям приема, события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Нас интересует вероятность события $A = \{\text{корреспондент вообще услышит вызов}\}$.

Обозначим через $A_i = \{\text{корреспондент услышит } i\text{-й вызов}\}$, $i = 1, 2, 3$.

Если учесть, что A заключается в том, что корреспондент услышит хотя бы один вызов, то найдем вероятность противоположного события

$$\bar{A} = \{\text{корреспондент не услышит ни одного вызова}\}.$$

Так как $A_i, i = 1, 2, 3$ независимые события, то

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \\ &= (1-0,2)(1-0,3)(1-0,4) = 0,336. \end{aligned}$$

Отсюда получим искомую вероятность $P(A) = 0,664$.

Задачи к 1.4

1. Пусть события A и B независимы. Доказать, что пары событий A и $\bar{B}$; B и $\bar{A}$; $\bar{A}$ и $\bar{B}$ тоже независимы. Доказать также, что пары событий A и $A \cup B$; A и $A \cap B$ зависимы.

2. Иностранная фирма, производящая автомобили, интересуется российским рынком. Для изучения вкуса потенциальных покупателей проводится опрос, в котором выясняются наиболее желательные характеристики автомобиля. Предположим, что результаты опроса показали: 35% потенциальных покупателей в основном оценивают автомобиль по его техническим характеристикам, 50% - по его дизайну, 25% - считают одинаково важным и то, и другое. Основываясь на этой информации, ответьте, являются ли два вида предпочтений потенциальных покупателей независимыми друг от друга? Объясните.

3. Вероятность того, что завтра цены на потребительские товары вырастут, равна 0,3; вероятность того, что завтра поднимется цена на серебро, равна 0,2, а вероятность одновременного роста цен на потребительские товары и серебро составляет 0,06. Являются ли цены на потребительские товары и серебро независимыми друг от друга? Поясните ответ.

1.5. Дополнительные задачи к Главе 1

1. Из колоды в 36 карт достают семь карт. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна пара одинаковых по достоинству карт.

2. Абонент забыл последнюю цифру шестизначного номера телефона и потому набирает её наудачу. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. Как изменится эта вероятность, если последняя цифра нечётная.

3. Шестнадцать теннисистов встречаются в турнире по олимпийской схеме (проигравший выбывает). Перед турниром теннисистам присваиваются случайные номера. Найти вероятность того, что второй по силе игрок займет второе место.

4. 15 студентов произвольным образом расходятся по 6 аудиториям. Найти вероятность того, что в первой аудитории окажется 3 студента, во второй - 4, а в остальных - по 2.

5. На шарах написаны числа от 11 до 40. Случайным образом выбирают 8 шаров. Пусть они помечены числами $a(1), a(2), \dots, a(8)$. Найти вероятность того, что $10 < \max_{1 \leq i \leq 8} a(i) - \min_{1 \leq i \leq 8} a(i) \leq 16$.

6. Из колоды в 36 карт достают семь карт, а после этого еще семь. Найти вероятность того, что количество красных карт и трэф в обеих семерках совпадает.

7. Из урны, содержащей шары с номерами $1, 2, \dots, N$ вынимается M ($M < N$) раз шар и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что из номеров вынутых шаров можно составить убывающую последовательность

8. Из колоды в 36 карт игроку выдают три карты. Найти вероятность того, что он сможет побить две девятки - трэфовую и пиковую, если пики козыри.

9. Три игрока бросают по монете с вероятностями выпадения «решки» - p_1, p_2 , и p_3 , соответственно. Выигрывает тот, у кого результат

отличается от двух остальных. Если все результаты одинаковые, то монеты бросают еще раз и т.д. Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

10. Два собрания сочинений, состоящие соответственно из 10 и 12 томов, случайно поставили на одну полку. Найти вероятность того, что номера томов идут в неубывающем порядке :1, 1, 2, 2,

11. Подбросили игральную кость и из колоды в 36 карт взяли столько карт, сколько указала игральная кость. Найти вероятность того, что все вытащенные карты окажутся «тузами».

12. Друзья могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, а в другой - две игральные кости. Счет в любой игре равен количеству очков, выпавших на одной кости, или на обеих костях вместе. Найти вероятность того, что они играют в игру с одной костью, если известно, что выпало два очка.

13. Имеются две партии однородных изделий: первая партия состоит из 10 изделий, среди которых 2 дефектных, вторая партия - 14, среди которых 3 дефектных. Из первой партии берется 4 изделия, а из второй - 5 изделий. Эти 9 изделий смешиваются и образуют новую партию. Из новой партии берется наугад одно изделие. Найти вероятность того, что изделие будет дефектным.

14. Вероятности попадания при каждом выстреле для трёх стрелков равны 0,7; 0,6 и 0,8, соответственно. При одновременном выстреле всех трёх стрелков имелось два попадания. Найти вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

15. Монета радиуса 2 см случайным образом бросается на стол, разграфленный на квадраты со стороной 5 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной стороной квадрата

16. На окружности радиуса R наудачу поставлены три точки A, B, C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

17. На отрезок наудачу бросаются три точки, одна за другой. Найти вероятность того, что третья по счету точка упадет между двумя первыми.

19. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка. Пусть (x,y) - её координаты. Найти $\mathbf{P}\{\max(x,y) < z\}$, где $0 < z < 1$.

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Случайные величины со значениями в $\mathbb{R}^1$

2.1.1. Случайные величины

Рассмотрим вероятностное пространство $\{\Omega, F, \mathbf{P}\}$, где Ω - пространство элементарных событий, F — σ -алгебра событий и $\mathbf{P}$ — определенная на ней вероятность. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ некоторая функция, определенная на Ω и принимающая значения в $\mathbb{R}^1$.

Если для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^1$ событие $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$, то говорят, что $\xi = \xi(\omega)$ — *измеримая функция*.

Определение. Случайной величиной называется измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$, отображающая Ω в $\mathbb{R}^1$.

Другими словами, случайной величиной ξ называется функция, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу ω число $\xi = \xi(\omega)$ и обладающая свойством измеримости.

Пример. Бросаем игральную кость один раз. Рассмотрим определенную на Ω функцию $\xi = \begin{cases} 1, & \text{если выпало нечетное число,} \\ 0, & \text{если выпало четное число} \end{cases}$.

Для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^1$ событие $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$, где F — σ -алгебра событий из Ω . Поэтому ξ является случайной величиной.

2.1.2. Функция распределения

Определение. Функцией распределения случайной величины ξ будем называть следующую функцию

$$F_{\xi}(x) = F(x) = \mathbf{P}(\xi \in (-\infty, x)) = \mathbf{P}(\xi < x).$$

Пример 1. Бросаем игральную кость один раз. Напомним, что $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим случайную величину ξ вида

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если выпало нечетное число,} \\ 0, & \text{если выпало четное число} \end{cases}.$$

Найдем функцию распределения $F_\xi(x)$. Пусть $x \leq 0$, тогда $F_\xi(x) = 0$, поскольку $\{\xi < x\}$ для такого x - невозможное событие. Рассмотрим промежуток $(0, 1]$, т.е. $0 < x \leq 1$. Тогда

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\xi = 0) = \mathbf{P}(\text{выпадение четного числа}) = 1/2.$$

Остается случай, когда $x > 1$. В этом случае,

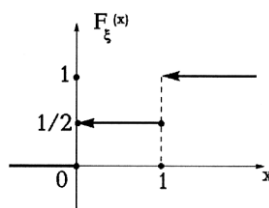
$$F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\xi = 0) + \mathbf{P}(\xi = 1) = 1,$$

поскольку $\{\xi < x\} = \{\xi = 0\} \cup \{\xi = 1\}$ —объединение несовместных событий.

Итак, функция распределения случайной величины ξ определяется так:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид:



Пример 2. Рассмотрим «задачу о встрече», приведенную в пункте 1.2.3. Пусть случайная величина ξ — величина ошибки в часах первого человека. Определим функцию распределения этой величины. Пусть $x \leq -5$, тогда $F_\xi(x) = 0$. Рассмотрим промежуток $(-5, 5]$, т.е. $-5 < x \leq 5$. Тогда $\mathbf{P}(\xi < x) = (x - (-5))/10 = (x + 5)/10$. Эта вероятность (геометрическая) вычислена следующим образом: $G = [-5, 5]$ и $g = [-5, x]$ и

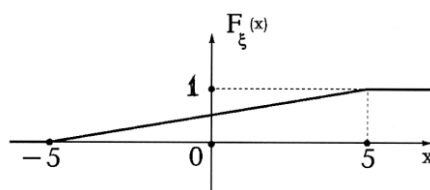
$$\mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\text{попасть в } g) = \frac{\mu(g)}{\mu(G)} = \frac{x - (-5)}{10} = \frac{x+5}{10}.$$

Остается случай, когда $x > 5$. Тогда $F_{\xi}(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = 1$.

Итак, случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -5, \\ \frac{x+5}{10}, & \text{если } -5 < x \leq 5, \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

График этой функции выглядит следующим образом:



2.1.3. Свойства функции распределения

1). $0 \leq F(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^1$.

По определению функция распределения является вероятностью, поэтому свойство очевидно.

2). $F(x)$ —неубывающая функция, т.е. при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $F(x_1) \leq F(x_2)$.

При $x_1 < x_2$ событие $\{\xi < x_1\}$ влечет событие $\{\xi < x_2\}$, поэтому

$$\mathbf{P}(\xi < x_1) \leq \mathbf{P}(\xi < x_2),$$

откуда следует свойство 2.

3). $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

Обозначим $A_n = \{\xi < x_n\}$, где $\{x_n\}$ монотонно убывающая к $-\infty$ последовательность. Очевидно, что $A_n \in \mathcal{F}$ для любого n , и $A_{n+1} \subseteq A_n$ - По лемме непрерывности (см. 1.1.3).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\cap_n A_n) = \mathbf{P}(\xi = -\infty) = 0.$$

Но $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\xi < x_n)$, а это есть функция распределения, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$ для любой монотонно убывающей к $-\infty$ последовательности $\{x_n\}$, отсюда можно получить и соотношение: $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Пусть $B_n = \{\xi \geq x_n\}$, где $\{x_n\}$ монотонно возрастающая к ∞ последовательность. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(B_n) = 0$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x_n)] = 0$, следовательно и $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - F(x)] = 0$.

$$4). \mathbf{P}(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Пусть $A = \{\xi < x_1\}$, $B = \{\xi < x_2\}$ и $C = \{x_1 \leq \xi < x_2\}$. Тогда очевидно, что $B = A \cup C$ и события A , C несовместны. По аксиоме 3 мы получаем, что

$$\mathbf{P}(\xi < x_2) = \mathbf{P}(\xi < x_1) + \mathbf{P}(x_1 \leq \xi < x_2),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

5). $F(x)$ — непрерывная слева функция, т.е. для любой последовательности чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, сходящейся к числу x слева, выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

Пусть для определенности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ возрастающая последовательность. Рассмотрим события

$$A = \{\xi < x\}, A_1 = \{\xi < x_1\}, A_n = \{x_{n-1} \leq \xi < x_n\}, n = 2, 3, \dots$$

Очевидно, что $A = \cup_n A_n$, причем $A_1, A_2, \dots$ попарно несовместные события, тогда по аксиоме 3 получаем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbf{P}(A_n) = F(x_1) + (F(x_2) - F(x_1)) + \dots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

Итак, функция распределения любой случайной величины удовлетворяет вышеуказанным свойствам. Верно и обратное, а именно, если функция удовлетворяет свойствам 1-5, приведенным выше, то найдется случайная величина ξ , для которой эта функция будет функцией распределения.

Задачи к 2.1

1. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины – числа импортных из четырёх наудачу выбранных телевизоров. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить её график.

2. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Составить закон распределения случайного числа ξ бракованных изделий среди отобранных. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить её график.

3. Имеются три базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить некий товар. Составить закон распределения числа баз, на которых в данный момент этот товар отсутствует. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить её график.

4. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Составить закон распределения числа положительных заключений на проверяемые балансы. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить её график.

2.2. Дискретный и непрерывный типы распределений

2.2.1. Дискретная случайная величина

Определение. Случайная величина ξ называется дискретной, если она принимает конечное или счетное множество значений.

Такая случайная величина характеризуется следующей таблицей, которая называется *таблицей распределения*:

ξ	a_1	a_2		a_n	
P	p_1	p_2		p_n	

Здесь $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — значения случайной величины ξ , а $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — вероятности этих значений, т.е. $p_k = \mathbf{P}(\xi = a_k)$, $\sum_k p_k = 1$.

По этой таблице можно построить функцию распределения случайной величины ξ . Пусть ξ — дискретная случайная величина, заданной таблицей распределения, причем $a_1, a_2, \dots, a_n$ расположены в порядке возрастания:

ξ	a_1	a_2		a_n
P	p_1	p_2		p_n

Рассмотрим значения функции распределения случайной величины ξ на интервалах: $(-\infty, a_1]$, $(a_1, a_2]$, ..., $(a_{n-1}, a_n]$ и (a_n, ∞) .

Пусть $x \in (-\infty, a_1]$, тогда событие $\{\xi < x\}$ становится невозможным, поэтому $F_\xi(x) = 0$. Если $x \in (a_1, a_2]$, то $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\xi = a_1)$, и поэтому $F_\xi(x) = p_1$.

Аналогично, если $x \in (a_2, a_3]$, то событие $\{\xi < x\} = \{\xi = a_1\} \cup \{\xi = a_2\}$, и поэтому $F_\xi(x) = p_1 + p_2$.

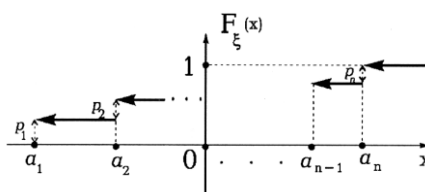
Рассуждая аналогично, получаем, если $x \in (a_{k-1}, a_k]$, то $F_\xi(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}$.

Наконец, если $x > a_n$, то событие $\{\xi < x\}$ становится достоверным, и поэтому $F_\xi(x) = 1$.

Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины ξ является кусочно-постоянной функцией (ступенчатой), принимающей на интервале $(-\infty, a_1]$ значение 0, на интервалах $(a_{k-1}, a_k]$, $k = 2, 3, \dots, n$ — значение $p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}$ и на интервале (a_n, ∞) — значение 1. Это записывается так:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a_1, \\ \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}, & \text{если } a_{k-1} < x \leq a_k, \quad k = 2, \dots, n, \\ \dots \\ 1, & \text{если } x > a_n. \end{cases}$$

График этой функции выглядит следующим образом:



Замечание. Для дискретной случайной величины ξ имеет место

$$\mathbf{P}(\xi \in A) = \sum_{k: a_k \in A} p_k$$

где A — произвольное множество из $\mathfrak{R}^1$.

Пример. Игроку присуждается одно очко, если при подбрасывании монеты выпадает «решетка», и ничего не присуждается в противном случае. Построим график функции распределения выигрыша игрока после трех бросаний монеты.

Пусть ξ — выигрыш (число очков) игрока после трех бросаний. ξ — дискретная случайная величина, и она может принимать значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности p_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$p_1 = \mathbf{P}(\xi = 0) = 1/8, \quad p_2 = \mathbf{P}(\xi = 1) = 3/8$$

$$p_3 = \mathbf{P}(\xi = 2) = 3/8, \quad p_4 = \mathbf{P}(\xi = 3) = 1/8.$$

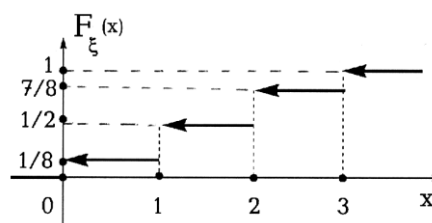
Эти вероятности подсчитаны следующим образом: например, событию $\{\xi = 2\}$ соответствуют три из восьми возможных элементарных событий (соответствующие исходам, когда в одном из трех бросаний выпала «решетка», а в двух других — «герб»). Таблица распределения случайной величины ξ выглядит так:

ξ	0	1	2	3
P	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Используя рассуждения, аналогичные вышеуказанным, находим функцию распределения случайной величины ξ :

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1/8, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 4/8, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 7/8, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Построим график этой функции



2.2.2. Непрерывная случайная величина

Определение. Случайная величина ξ называется непрерывной (абсолютно непрерывной), если существует такая функция $p_{\xi}(t)$, что имеет место следующее равенство

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt.$$

Функция $p_{\xi}(t)$ называется *плотностью распределения* случайной величины ξ и обладает следующими свойствами.

$$1). p_{\xi}(t) \geq 0 \text{ для любого } t \in \mathfrak{R}^1.$$

Из определения видно, что $p_{\xi}(t) = F'_{\xi}(t)$ в точках непрерывности $p_{\xi}(t)$. Поскольку $F_{\xi}(x)$ — неубывающая функция, то свойство 1 становится очевидным.

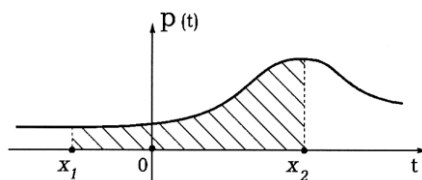
$$2). \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(t) dt = 1.$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(t) dt = F_{\xi}(\infty)$, то согласно свойству 3 функции распределения (см. 2.1.3) получим требуемое.

$$3). P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(t) dt.$$

Так как $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1)$, то получаем требуемое из определения 2.

Свойствам 2 и 3 можно дать геометрическую интерпретацию. Вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $[x_1, x_2]$, согласно свойству 3, равна площади криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке



Согласно свойства 2, площадь фигуры, заключенной под всей кривой плотности распределения, равна единице.

Замечание. Для непрерывной случайной величины ξ имеет место

$$\mathbf{P}(\xi \in A) = \int_A p_{\xi}(t) dt$$

где A - произвольное множество из $\mathfrak{R}^1$.

Приведем еще одно важное свойство непрерывной случайной величины: для любого $a \in \mathfrak{R}^1$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}(\xi = a) = F_{\xi}(a+0) - F_{\xi}(a).$$

Докажем это. Пусть $A_n = \{a \leq \xi < a + 1/n\}$. Для любого n

$$A_{n+1} \subset A_n \text{ и } A = \{\cap_n \{a \leq \xi < a + 1/n\}\} = \{\xi = a\}.$$

По лемме непрерывности получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(a \leq \xi < a + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F_{\xi}\left(a + \frac{1}{n}\right) - F_{\xi}(a)\right) = F_{\xi}(a+0) - F_{\xi}(a). \end{aligned}$$

Следовательно, для непрерывной случайной величины ξ имеет место: $\mathbf{P}(\xi = a) = 0$, т.е. вероятность попадания в любую заданную точку для непрерывной случайной величины равна нулю, поскольку в этом случае $F_{\xi}(a+0) = F_{\xi}(a)$.

Из вышесказанного следует, что в свойстве 2 знак $\leq$ можно заменить на знак $<$, и тогда, свойство 3 выглядит так:

$$\mathbf{P}(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(t) dt.$$

2.2.3. Примеры случайных величин

Сначала рассмотрим наиболее важные распределения дискретных случайных величин.

1. Распределение Бернулли с параметром p , $0 < p < 1$.

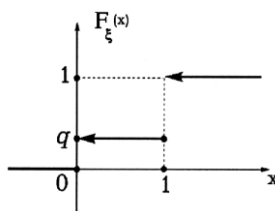
Дискретная случайная величина ξ имеет распределение Бернулли (или ξ распределена по закону Бернулли), если она принимает значения 0 и 1 с вероятностями q и p , соответственно. Таблица распределения выглядит так:

ξ	0	1
P	q	p

Функция распределения ξ имеет вид (см. 2.2.1.):

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ q, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

График этой функции строится следующим образом



2. Биномиальное распределение с параметрами n, p .

Дискретная случайная величина ξ распределена по биномиальному закону, если ее таблица распределения выглядит так:

ξ	0	1	...	n
P	p_1	p_2		p_n

где $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}; k = 0, 1, \dots, n$.

Проверьте самостоятельно, что $\sum_{k=0}^n p_k = 1$.

Число успехов в n экспериментах (одинаковых) двумя исходами в каждом эксперименте является примером случайной величины, имеющей биномиальное распределение.

3. Геометрическое распределение с параметром $q, 0 \leq q < 1$.

Дискретная случайная величина ξ имеет геометрическое распределение, если ее таблица распределения имеет следующий вид:

ξ	0	1	...	n	...
P	p_1	p_2		p_n	...

где $p_k = q^{k-1} (1 - q), k = 1, 2, \dots, n, \dots$

Проверьте самостоятельно, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Число независимых экспериментов, которые необходимо провести до появления первого успеха является примером случайной величины, имеющей геометрическое распределение.

4. Распределение Пуассона с параметром $\lambda, \lambda > 0$.

Дискретная случайная величина ξ имеет распределение Пуассона, если ее таблица распределения выглядит следующим образом:

ξ	0	1	...	n	...
P	p_1	p_2		p_n	...

где $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}; k = 0, 1, \dots$

Проверьте самостоятельно, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Примером такой случайной величины является число вызовов, поступивших на телефонную станцию за определенный промежуток времени.

Теперь приведем примеры наиболее важных распределений непрерывных случайных величин.

5. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$p_{\xi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } t \in [a, b], \\ 0, & \text{если } t \notin [a, b] \end{cases}.$$

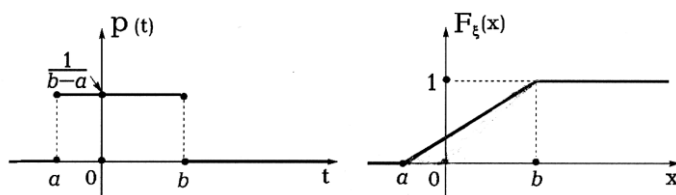
Функция распределения такой случайной величины определяется так: если $x < a$, то $\{\xi < x\}$ —невозможное событие, поэтому $F_{\xi}(x) = 0$. Если $x > b$, то $\{\xi < x\}$ — достоверное событие, поэтому $F_{\xi}(x) = 1$. А при $a \leq x < b$ получим

$$F_{\xi}(x) = \int_a^x p_{\xi}(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}.$$

Таким образом получаем функцию распределения

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 1, & \text{если } x \geq b. \end{cases}$$

Графики плотности распределения $p_{\xi}(t)$ и функции распределения $F_{\xi}(x)$ приведены ниже



6. Показательное (экспоненциальное) распределение с параметром λ , $\lambda > 0$

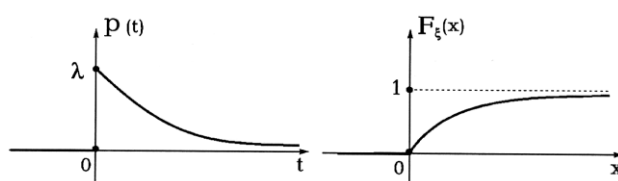
Непрерывная случайная величина ξ имеет показательное распределение, если ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$p_{\xi}(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}.$$

Аналогичными рассуждениями из предыдущего пункта получим функцию распределения такой случайной величины:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}.$$

Графики плотности распределения $p_{\xi}(t)$ и функции распределения $F_{\xi}(x)$ приведены ниже



Примерами показательно распределенных случайных величин могут служить: а) время распада атомов различных элементов, б) продолжительность безотказной работы радиоаппаратуры, в) длительность горения электрической лампочки, г) время обслуживания в системах массового обслуживания.

7. Нормальное распределение с параметрами a, σ^2 .

Непрерывная случайная величина ξ распределена по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет следующий вид:

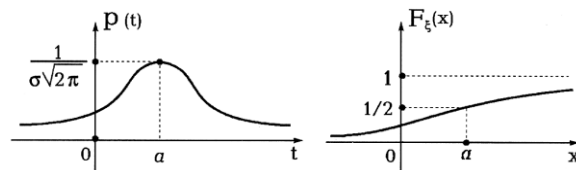
$$p_{\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения ξ выглядит так:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется *стандартным нормальным распределением* и его функция распределения обозначается через $\Phi(x)$. Посредством простой замены переменных легко показать, что $F_{\xi}(x) = \Phi(x-a/\sigma)$. (Проверьте самостоятельно!).

Графики плотности распределения $p_{\xi}(t)$ и функции распределения $F_{\xi}(x)$ приведены ниже



Положение кривой плотности распределения полностью определяется параметрами a и σ . В зависимости от величины σ форма кривой может быть при большой величине σ полой и при небольшой величине σ более или менее крутой. Во всех случаях кривая плотности строго симметрична относительно параметра a . Плотность нормального распределения имеет только один максимум, который соответствует параметру a и значение плотности в этой точке равен $1/\sigma \sqrt{2\pi}$.

Задачи к 2.2

1. Процент людей, купивших новое средство от головной боли после того как увидели его рекламу по телевидению, есть случайная величина, заданная так:

ξ	0	10	20	30	40	50
-------	---	----	----	----	----	----

P	0,10	0,20	0,35	0,20	0,10	0,05
----------	------	------	------	------	------	------

- а) Убедиться, что задан ряд распределения.
- б) Найти функцию распределения.
- в) Определить вероятность того, что более 20% людей откликнутся на рекламу.

2. В автомагазине ведётся ежедневная запись числа продаваемых машин. Эти данные использованы для составления вероятностного распределения следующих ежедневных продаж:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

- а) найти вероятность того, что завтра число проданных автомобилей будет от 2 до 4 (включая 2 и 4);
- б) составить функцию распределения числа автомобилей, продаваемых ежедневно.

3. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки в бухгалтерских проводках счетов. Предположим, что служащие компании при обработке входящих счетов допускают примерно 5% ошибок. Аудитор случайно отбирает 3 входящих документа.

- а) Найти закон распределения случайной величины ξ – числа ошибок, выявленных аудитором.
- б) Построить функцию распределения и её график.
- в) Определить вероятность того, что аудитор обнаружит более чем одну ошибку.

4. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.

5. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Составить закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.

6. Экзаменатор задаёт студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырёх либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна $2/3$. Составить закон распределения числа заданных студенту вопросов.

7. Владелец антикварного аукциона полагает, что предложения цены за определённую картину будут равномерно распределённой случайной величиной в интервале от 500 тыс. до 2 млн. руб.

а) Найдите плотность распределения предложения цены;

б) Определите вероятность того, что картина будет продана за цену, меньшую чем 675 тыс.;

в) Найдите вероятность того, что цена картины будет выше 1 млн. руб.

8. Предположим, что в течение года цены на акции некоторой компании подчинялись нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 48 у.е., и стандартным отклонением, равным 6. Чему равна вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за акцию была более 60 у.е.? Ниже 60 у.е. за акцию? Выше 40 у.е. за акцию? Между 40 и 50 у.е. за акцию?

9. Менеджер ресторана по опыту знает, что 70% людей, сделавших заказ на вечер придут в ресторан поужинать. В один из вечеров менеджер решил принять 20 заказов, хотя в ресторане было лишь 15 свободных столиков. Чему равна вероятность того, что более 15 посетителей придут на заказанные места?

10. Срок службы жесткого диска компьютера – случайная величина, подчиняющаяся экспоненциальному распределению со средней в 12000 ч. Найдите долю жестких дисков, срок службы которых превысит 20000ч.

11. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, подчиняется экспоненциальному закону с $\lambda = 0,25$ дня. Найдите долю зрителей, способных вспомнить рекламу спустя 7 дней?

12. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: а) выражение его плотности вероятности и функции распределения; б) вероятность того, что в течение 100 ч прибор не выйдет из строя.

13. В здании областной администрации случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 5 мин.

1. Чему равна функция распределения $F(x)$ для этого равномерного распределения?
2. Чему равна вероятность ожидания лифта более чем 3,5 мин?
3. Чему равна вероятность того, что лифт прибудет в течение первых 45 сек?
4. Чему равна вероятность, что время ожидания лифта в диапазоне от 1 до 3 мин (между 1 и 3 мин)?

14. Еженедельный выпуск продукции на заводе распределён приблизительно по нормальному закону со средним значением $a=134786$ ед. продукции в неделю и $\sigma = 13000$ ед. Найдите вероятность того, что еженедельный выпуск продукции:

- а) превысит 150000 ед.;
- б) окажется ниже 100000 ед. в данную неделю;
- в) предположим, что возникли трудовые споры и недельный выпуск продукции стал ниже 80000 ед

Менеджеры обвиняют профсоюзы в беспрецедентном падении выпуска продукции, а профсоюзы утверждают, что выпуск находится в пределах принятого уровня ($\pm 3\sigma$). Доверяете ли Вы профсоюзам?

2.3. Функция от случайной величины

Рассмотрим на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ случайную величину $\xi = \xi(\omega)$. Возьмем обычную числовую функцию $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Сопоставляя каждому элементарному событию ω число $\eta(\omega)$ по формуле $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$, мы получим новую случайную величину η , которую и назовем *функцией от случайной величины ξ* .

Функция $\eta = f(\xi)$ от дискретной случайной величины ξ также является дискретной случайной величиной, поскольку она не может принимать больше значений, чем случайная величина ξ . Если случайная величина ξ имеет следующую таблицу распределения:

ξ	a_1	a_2		a_n	
P	p_1	p_2		p_n	

то таблица распределения случайной величины $\eta = f(\xi)$ определяется так:

ξ	$f(a_1)$	$f(a_2)$		$f(a_n)$	
P	p_1	p_2		p_n	

при этом, если появляются одинаковые значения $f(a_i)$, то соответствующие столбцы надо объединить в один, приписав им суммарную вероятность.

Функция $\eta = f(\xi)$ от непрерывной случайной величины ξ может быть как непрерывной, так и дискретной (дискретной в том случае, когда множество значений $f(x)$ — не более чем счетное).

Теперь найдем функцию распределения $\eta = f(\xi)$ по заданной плотности $p(t)$. По определению $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(f(\xi(\omega)) < x)$. Последнюю вероятность можно определить, используя аксиому «сложения» вероятностей, просуммировав вероятности всех возможных значений t случайной величины ξ , для которых $f(t) < x$. Заменяя сумму на интеграл, получаем

$$F_\eta(x) = \int_{t: f(t) < x} p_\xi(t) dt.$$

Задачу нахождения распределения η можно упростить в некоторых случаях.

1). Пусть $f(x)$ — монотонно возрастающая функция. В этом случае событие $\{f(\xi(\omega)) < x\}$ совпадает с событием $\{\xi(\omega) < f^{-1}(x)\}$, где f^{-1} обратная к f функция, и, следовательно,

$$F_{\eta}(x) = \mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(f(\xi) < x) = \mathbf{P}(\xi < f^{-1}(x)) = F_{\xi}(f^{-1}(x)).$$

2). Пусть, кроме того, ξ — непрерывная случайная величина, а f^{-1} имеет производную $(f^{-1}(x))'$. Тогда случайная величина η также является непрерывной, и ее плотность распределения определяется с помощью дифференцирования сложной функции:

$$p_{\eta}(t) = F'_{\eta}(t) = \left(F_{\xi}(f^{-1}(t)) \right)' = p_{\xi}(f^{-1}(t)) \cdot \left| (f^{-1}(t))' \right|.$$

Пример 1. Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2 . Найдем распределение случайной величины $\eta = e^{\xi}$. Здесь $f(x) = e^x$, и $f^{-1}(t) = \ln t$. Пользуясь вышеуказанными рассуждениями получаем, что

$$p_{\eta}(t) = p_{\xi}(f^{-1}(t)) \cdot \left| (f^{-1}(t))' \right| = p_{\xi}(\ln t) \cdot \frac{1}{t} = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0, \\ \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Отметим, что полученное распределение случайной величины носит название *логнормального распределения*.

Пример 2. Пусть ξ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2 . Найдем распределение случайной величины $\eta = (\xi - a)/\sigma$. Тогда

$$p_{\eta}(t) = p_{\xi}\left(f^{-1}(t)\right) \cdot \left| \left(f^{-1}(t)\right)' \right| = p_{\xi}\left(\frac{t + \frac{a}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} = p_{\xi}(t \cdot \sigma + a) \cdot \frac{1}{\sigma}$$

$$= \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(t \cdot \sigma + a - a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

-плотность стандартного нормального распределения.

Задачи к 2.3

1. Случайная величина ξ подчинена распределению с плотностью

$$p_{\xi}(t) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{18}}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Найти плотность $p_{\eta}(s)$, если $\eta = A\xi + B$, A и B —постоянные.

2. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти распределение случайной величины $\eta = \ln(\xi + 1)$.

3. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p_{\xi}(t) = \begin{cases} 0, & \text{иначе,} \\ 0,5 & , \text{если } 0,5 \leq |t| \leq 1,5. \end{cases} \quad \text{Найти распределение случайной величины}$$

$$\eta = 2\xi^2 - 1.$$

2.4. Случайные величины со значениями в $\mathfrak{R}^n$.

2.4.1. Случайные векторы

Пусть $\{\Omega, F, P\}$ —вероятностное пространство, $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ — заданные на нем случайные величины. Для любого $\omega \in \Omega$ определим

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)),$$

т.е. упорядоченную последовательность n случайных величин со значениями в $\mathbb{R}^1$.

Определение 1. *Случайным вектором называется отображение*

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Иногда, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется также многомерной случайной величиной. Здесь $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (проекции вектора ξ на каждую ось) — случайные величины, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$.

Определение 2. *Функцией распределения случайного вектора ξ называется следующая функция*

$$F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n).$$

Функцию $F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют также *совместной функцией распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$* .

В дальнейшем мы в основном будем иметь дело с двумерным случаем. Поэтому мы остановимся на нем, отметив, что n -мерный случай рассматривается аналогично.

Ограничимся перечислением свойств двумерной функции распределения, отметив лишь, что они доказываются аналогично соответствующим свойствам одномерной функции распределения.

$$1). 0 \leq F_{\xi}(x_1, x_2) \leq 1, \text{ для любых } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$2). F_{\xi}(x_1, x_2) \text{ — неубывающая функция по каждому из аргументов } x_1, x_2.$$

$$3). F_{\xi}(-\infty, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = 0, \quad F_{\xi}(x_1, -\infty) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = 0,$$

$$F_{\xi}(-\infty, -\infty) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = 0,$$

$$F_{\xi}(+\infty, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = F_{\xi_2}(x_2),$$

$$F_{\xi}(x_1, +\infty) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1),$$

$$F_{\xi}(+\infty, +\infty) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = 1.$$

$$4). \mathbf{P}(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = F_{\xi}(b_1, b_2) - F_{\xi}(b_1, a_2) - F_{\xi}(a_1, b_2) + F_{\xi}(a_1, a_2).$$

5). $F_{\xi}(x_1, x_2)$ — непрерывная слева по каждому из аргументов x_1 и x_2 функция.

2.4.2. Дискретные и непрерывные двумерные случайные величины

Определение 1. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) называется дискретной, если ξ_1 и ξ_2 являются дискретными случайными величинами.

Такая случайная величина имеет следующую таблицу распределения:

$\xi_1 \mid \xi_2$	b_1	b_2	...	b_m	...
a_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	...
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	...
...	...	...	...	...	...
a_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	
...	...	...	...	...	...

где $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ — значения случайной величины ξ_1 ; $b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$ — значения случайной величины ξ_2 ; а $p_{ij} = \mathbf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j)$ — совместные вероятности значений (ξ_1, ξ_2) .

По этой таблице легко определить распределение вероятностей каждой из случайных величин ξ_1 и ξ_2 (эти распределения называются *частными* или *маргинальными*):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_1 = a_i) &= \mathbf{P}(\xi_1 = a_i, -\infty < \xi_2 < \infty) = \mathbf{P}\left(\xi_1 = a_i, \bigcup_j (\xi_2 = b_j)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_j (\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j)\right) = \sum_j \mathbf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j) = \sum_j p_{ij} \quad , \end{aligned}$$

для любого $i = 1, 2, \dots, n, \dots$; аналогичными рассуждениями получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_2 = b_j) &= \mathbf{P}(-\infty < \xi_1 < \infty, \xi_2 = b_j) = \mathbf{P}\left(\bigcup_i (\xi_1 = a_i), \xi_2 = b_j\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_i (\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j)\right) = \sum_i \mathbf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j) = \sum_i p_{ij} \quad . \end{aligned}$$

для любого $j = 1, 2, \dots, m$.

Нетрудно определить функцию распределения $F_\xi(x_1, x_2)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Ясно, что

$$F_\xi(x_1, x_2) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) = \sum_{i: a_i < x_1} \sum_{j: b_j < x_2} \mathbf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j) = \sum_{i: a_i < x_1} \sum_{j: b_j < x_2} p_{ij} ,$$

т.е. необходимо просуммировать p_{ij} по тем значениям i и j , для которых $a_i < x_1$, $b_j < x_2$.

Определение 2. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) называется непрерывной, если существует такая неотрицательная, интегрируемая на плоскости функция $p(t_1, t_2)$, называемая двумерной плотностью (или совместной плотностью распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2), что имеет место

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(t_1, t_2) dt_1 dt_2 .$$

Если здесь предположить, что $p(t_1, t_2)$, непрерывная функция по обоим аргументам, тогда

$$p(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} F(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F(t_1, t_2).$$

Приведем некоторые *свойства* совместной плотности распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 .

$$1) p(t_1, t_2) \geq 0.$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 1.$$

$$3) P((\xi_1, \xi_2) \in D) = \iint_D p(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \text{ где } D \in \mathfrak{R}^2 \text{ — некоторая область.}$$

Далее, воспользовавшись свойством 3 двумерной функции распределения (см. 2.4.1), имеем

$$F_{\xi_1}(x_1) = F_{\xi}(x_1, \infty) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2) dt_2 \right) dt_1,$$

$$F_{\xi_2}(x_2) = F_{\xi}(\infty, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_2} p(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2) dt_1 \right) dt_2$$

и дифференцируя, получаем выражения для одномерных плотностей:

$$p_{\xi_1}(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2) dt_2 \text{ и } p_{\xi_2}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2) dt_1.$$

Пример 1. Фирма выпускает мини-заводы по производству хлеба. На рекламу может быть израсходовано определённое количество средств. В таблице приведено возможное количество проданных в течение месяца заводов (ξ_2) и объём средств, израсходованных на рекламу (ξ_1). Каждой паре значений (a_i, b_j) случайных величин (ξ_1, ξ_2) поставлена в соответствие вероятность p_{ij} появления этой пары.

$\xi_2 \backslash \xi_1$	0	1	2
1	0,12	0,15	0,10

2	0,08	0,10	0,12
3	0,05	0,10	0,18

Требуется составить таблицы распределения вероятностей для каждой из величин ξ_1 и ξ_2 и выразить условный закон распределения вероятностей величины ξ_1 при $\xi_2 = 2$.

Воспользуемся формулами

$$P(\xi_1 = a_i) = \sum_j p_{ij} \text{ для любого } i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$P(\xi_2 = b_j) = \sum_i p_{ij} \text{ для любого } j = 1, 2, \dots, m, \dots$$

Таким образом, вероятность события $P(\xi_1 = a_i)$ равна сумме вероятностей p_{ij} в i – м столбце, а вероятность $P(\xi_2 = b_j)$ равна сумме вероятностей p_{ij} в j - й строке . В результате получаем таблицы распределения вероятностей:

ξ_2	0	1	2
P	0,25	0,35	0,4

ξ_1	1	2	3
P	0,37	0,3	0,33

Находим условные вероятности величины ξ_1 при $\xi_2 = 2$:

$$P(\xi_1 = 1 / \xi_2 = 2) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2) / P(\xi_2 = 2) = 0,10 / 0,4 = 0,25;$$

$$P(\xi_1 = 2 / \xi_2 = 2) = P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 2) / P(\xi_2 = 2) = 0,12 / 0,4 = 0,30;$$

$$P(\xi_1 = 3 / \xi_2 = 2) = P(\xi_1 = 3, \xi_2 = 2) / P(\xi_2 = 2) = 0,18 / 0,4 = 0,45.$$

Пример 2. Пусть плотность распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ постоянна в области $D = \{a_1 \leq t_1 \leq b_1, a_2 \leq t_2 \leq b_2\}$, т.е.

$$p(t_1, t_2) = \begin{cases} C, & \text{если } (t_1, t_2) \in D \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдем C , пользуясь свойством 2 совместной плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 1. \text{ Найдем } \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} C dt_1 dt_2 = C(b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Отсюда находим $C = 1 / (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

Такое распределение называется *равномерным* в области D .

Найдем частные плотности распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2

$$\begin{aligned} p_{\xi_1}(t_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t_1, t_2) dt_2 = \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} dt_2 \\ &= \frac{1}{b_1 - a_1} \text{ для любого } a_1 \leq t_1 \leq b_1, \\ p_{\xi_2}(t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t_1, t_2) dt_1 = \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} dt_1 \\ &= \frac{1}{b_2 - a_2} \text{ для любого } a_2 \leq t_2 \leq b_2. \end{aligned}$$

Мы получили, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют равномерные распределения.

4.3. Независимость случайных величин

Пусть $\{\Omega, F, P\}$ — вероятностное пространство, $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega), \dots$ — заданные на нем случайные величины, и $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — конечные или бесконечные промежутки в $\mathbb{R}^1$.

Определение. *Случайные величины $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega), \dots$ называются независимыми в совокупности, если выполняется следующее равенство*

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \dots, \xi_n \in A_n) = \mathbf{P}(\xi_1 \in A_1) \cdot \mathbf{P}(\xi_2 \in A_2) \cdots \mathbf{P}(\xi_n \in A_n),$$

для $n=2,3,\dots$

Как следствие, если взять в качестве $A_i = (-\infty, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, получим: случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы в совокупности, если выполняется следующее равенство

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1) \cdots \mathbf{P}(\xi_n < x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n),$$

для $n=2,3,\dots$

Отметим, что имеет место и обратное утверждение, т.е. если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы в совокупности, то выполняется следующее равенство

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n).$$

(доказательство этого утверждения можно найти в [1]).

Для проверки независимости двух случайных величин (попарная независимость) иногда удобно пользоваться следующими результатами.

Теорема. 1). *Если случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет дискретное распределение, то случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются независимыми тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\mathbf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j) = \mathbf{P}(\xi_1 = a_i) \cdot \mathbf{P}(\xi_2 = b_j),$$

где a_i, b_j — значения случайных величин ξ_1 и ξ_2 , соответственно.

2) *Если случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет непрерывное распределение, то случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются независимыми тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\mathbf{P}(t_1, t_2) = \mathbf{P}_{\xi_1}(t_1) \cdot \mathbf{P}_{\xi_2}(t_2).$$

Доказательство. Докажем пункт 2) теоремы.

Необходимость. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Тогда

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

С другой стороны (по определению)

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x_1, x_2) &= F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_2}(t_2) dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) \left(\int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_2}(t_2) dt_2 \right) dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_1}(t_1) p_{\xi_2}(t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Сравнив последние два интеграла мы получаем требуемое, т.е.

$$p(t_1, t_2) = p_{\xi_1}(t_1) p_{\xi_2}(t_2).$$

Достаточность. Пусть выполняется равенство

$$p(t_1, t_2) = p_{\xi_1}(t_1) p_{\xi_2}(t_2).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_1}(t_1) p_{\xi_2}(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) \left(\int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_2}(t_2) dt_2 \right) dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_2}(t_2) dt_2 = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2), \end{aligned}$$

следовательно случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

Пример 1. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют совместную функцию распределения

$$F_{\xi}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1+x_2)}, & \text{если } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Проверим, являются ли независимыми случайные величины ξ_1 и ξ_2 .
Найдем функции распределения этих случайных величин.

$$F_{\xi_1}(x_1) = F_{\xi}(x_1, \infty) = \begin{cases} 1 - e^{-x_1}, & \text{если } x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$F_{\xi_2}(x_2) = F_{\xi}(\infty, x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-x_2}, & \text{если } x_2 \geq 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Теперь проверим:

$$F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{-x_2}) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1+x_2)} = F_{\xi}(x_1, x_2).$$

Значит, ξ_1 и ξ_2 независимые случайные величины.

Пример 2. Пусть таблица распределения дискретного случайного вектора (ξ_1, ξ_2) следующая:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Проверим независимость случайных величин ξ_1 и ξ_2 . Находим частные распределения ξ_1 и ξ_2 (см. 2.4.2.):

ξ_1	-1	1
P	1/8+1/12+7/24=1/2	5/24+1/6+1/8=1/2

ξ_2	-1	0	1
P	1/8+5/24=1/3	1/12+1/6=1/4	7/24+1/8=5/12

Теперь проверим соотношение из пункта 1) теоремы 1, например, для пары значений : $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1$. Найдем (из таблиц)

$$P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1) = 1/8,$$

$$P(\xi_1 = -1) \cdot P(\xi_2 = 1) = (1/2) \cdot (1/3) = 1/6.$$

Соотношение $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1) \neq P(\xi_1 = -1) \cdot P(\xi_2 = 1)$ не выполнено, так как $1/8 \neq 1/6$. Отсюда получаем, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются зависимыми.

Пример 3. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины. Рассмотрим случайную величину $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Тогда, используя свойство 3 из предыдущего пункта и независимость случайных величин ξ_1 и ξ_2 , получаем

$$F_{\eta}(x) = \iint_{t_1+t_2 < x} p_{\eta}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \iint_{t_1+t_2 < x} p_{\xi_1}(t_1) p_{\xi_2}(t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$| \text{замена: } t_1 + t_2 = t, t_1 = s | = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-s} p_{\xi_2}(t) dt \right) p_{\xi_1}(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-s) p_{\xi_1}(s) ds.$$

Дифференцируя последнюю формулу, получаем выражение для плотности $p_{\eta}(t)$ распределения суммы $\eta = \xi_1 + \xi_2$:

$$p_{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(t-s) \cdot p_{\xi_2}(s) ds.$$

Полученное выражение носит название «*формулы свертки*».

Задачи к 2.4

1. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (ξ_1, ξ_2) задан в таблице.

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

Найти: а) законы распределения одномерных случайных величин ξ_1 и ξ_2 ; б) условные законы распределения случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = 2$ и случайной величины ξ_2 при условии $\xi_1 = 1$; в) вероятность $P(\xi_2 > \xi_1)$.

2. Пусть число ошибок при вводе студентом в компьютер символьной и цифровой информации имеет следующие ряды распределения:

Символьная

0	1	2	3
0,1	0,1	0,7	0,1

Цифровая

0	1	2	3
0,2	0,6	0,1	0,1

Известно, что студент допустил три ошибки. Какова вероятность того, что цифровых ошибок больше, чем символьных?

3. Рассматривается двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) , где ξ_1 – срок поставки сырья, ξ_2 – время поступления требования на него. Известно, что поступление сырья и поступление требования на него могут произойти в любой день месяца (30 дней) с равной вероятностью. Определить: а) выражение совместной плотности и функции распределения двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2) ; б) плотности и функции распределения одномерных составляющих ξ_1 и ξ_2 ; в) зависимы или независимы ξ_1 и ξ_2 ; г) вероятности того, что поставка сырья произойдёт до и после поступления требования.

4. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) распределена равномерно внутри квадрата R с центром в начале координат. Стороны квадрата равны $\sqrt{2}$ и составляют углы 45° с осями координат. Определить а) выражение совместной плотности двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2) ; б) плотности вероятности одномерных составляющих ξ_1 и ξ_2