

2.5. Испытания Бернулли

2.5.1. Основные определения

Определение 1. Испытанием B называется любое разбиение множества Ω элементарных событий на не более чем счетное объединение событий:

$$B = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}, \quad \Omega = \bigcup_n A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Здесь $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ называются *исходами испытаний*.

С каждым испытанием B можно связать дискретную случайную величину, которая принимает значения a_i , если исходом испытания является A_i , $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

Пример. Двое играют в следующую игру. Бросают игральную кость один раз. Если выпало число 1 на верхней грани игральной кости, то первый игрок отдает второму игроку, допустим, 5 рублей; если число выпавших очков колеблется от 2 до 4, то второй игрок отдает первому игроку 3 рубля; если же число выпавших очков больше 4, то никто ставок не делает (т.е. никто никому ничего не дает). Множество элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ разобьем на непересекающиеся события A_1, A_2 , и A_3 , где события A_i , следующие:

$$A_1 = \{\text{выпало число } 1\}, \quad A_2 = \{\text{выпало число от } 2 \text{ до } 4 \text{ включительно}\}, \quad A_3 = \{\text{выпало число больше } 4\}.$$

Мы получили испытание

$$B = \{A_1, A_2, A_3\}, \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \\ A_1 \cap A_3 = \emptyset, \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

С этим испытанием можно связать, например, случайную величину

$$\xi = \{\text{сумма выигрыша первого игрока}\}.$$

Тогда по условиям задачи получаем, что (например):

$$\xi(\omega) = \begin{cases} -5, & \text{если } \omega \in A_1, \\ 3, & \text{если } \omega \in A_2, \\ 0, & \text{если } \omega \in A_3. \end{cases}$$

Пусть имеются n испытаний: $B_1 = \{A_{11}, A_{12}, \dots\}$, $B_2 = \{A_{21}, A_{22}, \dots\}, \dots, B_n = \{A_{n1}, A_{n2}, \dots\}$.

Испытания $B_1, B_2, \dots, B_n$ называются *независимыми*, если независимы (в совокупности) их исходы

$$A_{1k_1}, A_{2k_2}, \dots, A_{nk_n} : k_1, k_2, \dots, k_n = 1, 2, \dots.$$

Если с испытанием связывать случайные величины, то независимость испытаний равносильна независимости случайных величин, связанных с ними.

Определение 2. Испытания $B_1, B_2, \dots, B_n$, $n \geq 2$ называются испытаниями Бернулли, если

- 1) они независимы,
- 2) имеют только два исхода: $B_k = \{A_k, \bar{A}_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$,
- 3) вероятность $P(A_k) = p$ в каждом испытании одна и та же (не зависит, от k , $k = 1, 2, \dots, n$).

Из независимости испытаний Бернулли следует, что случайные величины ξ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ независимы. Итак, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих всего два значения. Если исходом испытания B_k было событие A_k , то его назовем *успехом*, если было событие $\bar{A}_k$ — то *неудачей*, а вероятность p — *вероятностью успеха* (в каждом испытании).

2.5.2. Формула Бернулли

Предположим, что рассматривается серия из n испытаний Бернулли.

Теорема. Пусть μ_n — число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда

$$P(\mu_n = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Равенство из теоремы называется *формулой Бернулли*, а распределение случайной величины μ_n — *биномиальным распределением*.

Доказательство. Как мы говорили выше, каждому испытанию сопоставляется случайная величина

$$\xi_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A_k, \\ 0, & \text{если } \omega \in \bar{A}_k. \end{cases}$$

Очевидно тогда, что $\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mu_n = k) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i = k\right) = \\
&\mathbf{P}\left(\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left\{ \xi_{i_1} = 1, \xi_{i_2} = 1, \dots, \xi_{i_k} = 1; \text{остальные } \xi_{i_s} = 0, s \neq 1, 2, \dots, k \right\}\right) = \\
&\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(\xi_{i_1} = 1) \cdots \mathbf{P}(\xi_{i_k} = 1) \cdot \prod_{s \neq 1, 2, \dots, k} \mathbf{P}(\xi_{i_s} = 0) = \\
&\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Здесь - суммирование ведется по различным выборкам без возвращения ($i_1, i_2, \dots, i_k$) объема k из генеральной совокупности чисел $(1, 2, \dots, n)$ объема n , которые различаются только составом. Их число, как известно, равно C_n^k .

Пример 1. Игральную кость бросаем пять раз. Найдём вероятность события $A = \{\text{число 6 выпадет ровно два раза}\}$.

Успехом назовём выпадение числа 6 при одном бросании игральной кости. Найдём вероятность успеха: $p = 1/6$. Итак, у нас имеются $n = 5$ испытаний Бернулли. Нас интересует вероятность события $A = \{\mu_5 = 2\}$. По формуле Бернулли находим:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\mu_5 = 2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = 0,16.$$

2.5.3. Теоремы Муавра-Лапласа

Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли $B_1, B_2, \dots, B_n, n \geq 2$ с вероятностью успеха p . Определим $x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, и пусть C и ε положительные числа.

Теорема 1 (локальная теорема Муавра-Лапласа). Пусть имеется последовательность испытаний Бернулли с вероятностью успеха p , тогда для всех k , таких, что $|x_{nk}| \leq C \cdot n^{(1/6) - \varepsilon}$, имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\mu_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}} = 1.$$

Вводя функцию $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, которую называют *функцией Гаусса*, переформулируем утверждение теоремы, т.е. справедливо следующее приближенное равенство

$$\mathbf{P}(\mu_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \phi(x_{nk}).$$

Здесь и в дальнейшем знак « $\sim$ » будет означать асимптотическую эквивалентность, определенную ниже.

Определение. Пусть a_n и b_n последовательности положительных чисел таких, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$. Будем говорить, что последовательности a_n и b_n асимптотически эквивалентны, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, и это обозначается как $a_n \sim b_n$.

Теорему доказывать не будем (см. например [3]).

Пример 1. Оператор обслуживает 25 однотипных приборов. Вероятность того, что прибор потребует к себе внимания оператора в течение промежутка времени T равна 0,4. Найдем вероятность того, что за время T ровно три прибора потребуют к себе внимания оператора. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа

$$\mathbf{P}(\mu_{25} = 3) \approx \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(3-25 \cdot 0,4)^2}{2 \cdot 25 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \approx 0,003, \text{ поскольку } p = 0,4 \text{ и } n = 25.$$

Теорема 2 (интегральная теорема Муавра-Лапласа). Пусть имеется последовательность испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где a и b —некоторые вещественные числа.

Используя функцию распределения стандартного нормального закона, в правой части формулы из Теоремы 2 получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx \Phi(b) - \Phi(a), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{ функция распределения}$$

стандартного нормального закона.

Доказательство и этой теоремы здесь приводить не будем (см. в [3]), отметим лишь, что эта теорема является следствием более общей *центральной предельной теоремы*, которую мы рассмотрим позже. Заметим также, что иногда функция $\Phi(x)$ заменяется функцией Лапласа вида

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Эта функция является нечетной, т.е. $\Phi_0(x) = -\Phi_0(-x)$, и кроме $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 1/2$.

Тогда утверждение теоремы 2 имеет вид:

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) \approx \Phi_0(b) - \Phi_0(a).$$

Пример 2. Вероятность выпуска бракованной детали $p = 0,02$. Найдем вероятность того, что в партии из 200 деталей бракованных будет не больше 5. Здесь $n = 200$, $p = 0,02$, следовательно $np = 200 \cdot 0,02 = 4$, $np(1-p) \approx 4$, и по условию $0 \leq \mu_5 \leq 5$. Найдем a и b :

$$\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\mu_n - 4}{2}, \quad \{0 \leq \mu_n \leq 5\} = \left\{ \frac{0-4}{2} \leq \frac{\mu_n - 4}{2} \leq \frac{5-4}{2} \right\} = \left\{ -2 \leq \frac{\mu_n - 4}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}, a = -2, b = \frac{1}{2}.$$

Тогда, по теореме 2 находим

$$\mathbf{P}(0 \leq \mu_n \leq 5) = \Phi_0(0,5) - \Phi_0(-2) = \Phi_0(0,5) + \Phi_0(2) = 0,191 + 0,477 = 0,67,$$

где значения $\Phi_0(1/2) = 0,191$ и $\Phi_0(2) = 0,477$ найдены из таблицы значений функции

$\Phi_0(x)$ (см. Таблицу 1 Приложения).

2.5.4. Теорема Пуассона

Рассмотрим последовательность серий испытаний Бернулли $B_{11}, B_{12}, \dots; B_{21}, B_{22}, \dots; \dots; B_{n1}, B_{n2}, \dots$. Предположим, что p_n - вероятность успеха в n -й серии, и $p_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Введем $\lambda_n = n p_n$.

Теорема (Пуассона). Пусть имеется последовательность серий испытаний Бернулли с вероятностью успеха p_n в n -й серии. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо

$$\mathbf{P}(\mu_n = k) \sim \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Раньше теорему Пуассона называли «законом малых чисел».

Доказательство. По формуле Бернулли

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mu_n = k) &= C_n^k \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} = C_n^k \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_n^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-(k-1))}{n^k} \cdot \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k} \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-(k-1)}{n} \cdot \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda_n}(-\lambda_n)}}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k} \sim \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n}. \end{aligned}$$

Итак, при определенных условиях биномиальное распределение сближается с распределением Пуассона.

Замечание. Если $np_n \rightarrow \lambda$ при $n \rightarrow \infty$ (или $\lambda_n \rightarrow \lambda$), тогда

$$\mathbf{P}(\mu_n = k) \sim \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Пример. Среди семян пшеницы 0,1% сорняков. Посеяли 1000 семян. Найдем вероятность того, что среди 1000 семян не менее трех сорняков. Найдем вероятность дополнения к событию A , то есть вероятность события {менее трех сорняков}. Здесь $n = 1000$, $p = 0,001$, $\lambda = np = 1$, μ_n — число успехов.

$$P(\bar{A}) = P(\mu_n = 0) + P(\mu_n = 1) + P(\mu_n = 2) \approx \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} + \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} \approx 0,92.$$

И, следовательно, $P(A) = 1 - 0,92 = 0,08$.

Задачи к 2.5

1. В налоговую инспекцию поступила информация о том, что в фирме «А» 20% списочного состава – «мёртвые души». Проверяющий инспектор отбирает случайным образом 4 наряда на выполненные работы и ищет работников, на которых они были выписаны. Какова вероятность, что среди четырёх случайно выбранных нарядов не будет ни одного фиктивного? Будет хотя бы один фиктивный?

2. В некоторой области вероятность того, что человек увидит цветную рекламу, равна 0,2. Случайно опрошены 10 человек. Чему равна вероятность того, что:

- а) 5 из них увидят рекламу;
- б) по крайней мере 2 человека видели её.

3. Фирма предлагает в продажу со склада партию из 10 компьютеров, 4 из которых – с дефектами. Покупатель приобретает 5 из них, не зная о возможных дефектах. Чему равна вероятность того, что все 5 компьютеров окажутся без дефектов? Ремонт одной дефектной машины будет стоить \$50.

4. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из восьми малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

5. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей не укомплектованы. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) менее трёх.

6. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров.

7. Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?

8. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того что наудачу взятая деталь будет бракованной равна 0,1?

9. В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает пять счетов. Если 3% счетов содержат ошибки, чему равна вероятность того, что аудитор найдёт следующее:

- 1) только один счёт будет с ошибкой?
- 2) хотя бы один счёт будет с ошибкой?

10. Прибытие посетителей в банк подчиняется закону Пуассона. Ответьте на следующие вопросы, предполагая, в среднем в банк каждые три минуты входит один посетитель:

- 1) Чему равна вероятность того, что в течение 1 минуты в банк войдёт один посетитель?
- 2) Чему равна вероятность того, что по крайней мере три посетителя войдут в банк в течение одной минуты?

11. Продавец ювелирного магазина заметил, что вероятность продажи украшения при единичном контакте с покупателем приблизительно равна 0,03. В течение рабочего дня к продавцу обратилось 100 посетителей его отдела. Чему равна вероятность того, что он продал по крайней мере одно изделие?

12. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трёх пакетов.

13. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы

компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листов число заказов будет:

а) равно 48; б) находиться в границах от 45 до 55.

14. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб.: а) не менее 300; б) от 300 до 400 включительно.

15. В результате проверки качества приготовленных для посева семян гороха установлено, что в среднем 90% всхожи. Сколько нужно посеять семян, чтобы с вероятностью 0,991 можно было ожидать, что доля взошедших семян отклонится от вероятности взойти каждому семени не более, чем на 0,03 (по абсолютной величине)?

16. Вероятность того, что дилер, торгующий ценными бумагами, продаст их, равна 0,7. Сколько должно быть ценных бумаг, чтобы можно было утверждать с вероятностью 0,996, что доля проданных среди них отклонится от 0,7 не более чем на 0,04 (по абсолютной величине)?

17. У страховой компании имеются 10000 клиентов. Каждый из них, страхуясь от несчастного случая, вносит 500 руб. Вероятность несчастного случая 0,0055, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшему, составляет 50000 руб. Какова вероятность того, что: а) страховая компания потерпит убыток; б) на выплату страховых сумм уйдёт не более половины всех средств, поступивших от клиентов?

2.6. Числовые характеристики случайных величин

2.6.1. Математическое ожидание случайной величины

1. Пусть ξ - дискретная случайная величина со следующей таблицей распределения:

ξ	a_1	a_2	...	a_n	...
P	p_1	p_2		p_n	...

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется следующее число: $E\xi = \sum_n a_n \cdot p_n$.

Для функции $\varphi(\xi)$ от случайной величины ξ (см. 2.3) математическое ожидание определяется так: $E\varphi(\xi) = \sum_n \varphi(a_n) \cdot p_n$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность дискретных случайных величин с совместным распределением: $p_{k,i,\dots,j} = P(\xi_1 = a_k, \xi_2 = b_i, \dots, \xi_n = c_j)$. Для случайных величин $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, являющихся функциями от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ математическое ожидание определяется так:

$$Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{k,i,\dots,j} f(a_k, b_i, \dots, c_j) \cdot p_{k,i,\dots,j}.$$

2. Пусть ξ - непрерывная случайная величина со плотность распределения - $p_\xi(t)$.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется следующее число: $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot p_\xi(t) dt$.

Для функции $\varphi(\xi)$ от случайной величины ξ (см. 2.3) математическое ожидание определяется так: $E\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cdot p_\xi(t) dt$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность непрерывных случайных величин с совместной плотностью распределения - $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Для случайных величин $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, являющихся функциями от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ математическое ожидание определяется так:

$$Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Замечание. Математическое ожидание называют еще *средним значением* величины и обозначают также через $M\xi$. Заметим, что величину $\alpha_k = E\xi^k$, $k \geq 1$

называют *начальным моментом* (или *просто моментом*) *порядка k* случайной величины ξ .

Рассмотрим **свойства** математического ожидания.

1. Если ξ постоянная величина, т.е. $\xi = C$ с вероятностью 1, то $E\xi = C$.

Это и последующие свойства докажем для дискретного случая.

Действительно, если $\xi = C$ вероятностью 1, то по определению математического ожидания получаем $E\xi = C \cdot 1 = C$.

2. $E(C\xi) = C \cdot E\xi$.

Если ξ дискретная случайная величина со значениями a_k и вероятностями $p_n = P(\xi = a_n)$, $n = 1, 2, \dots$, то согласно пункту 2.3 $C\xi$ является дискретной случайной величиной со значениями Ca_n и теми же вероятностями p_n , $n = 1, 2, \dots$. Тогда по определению математического ожидания получаем

$$E(C\xi) = E(C\xi) = \sum_n Ca_n \cdot p_n = C \cdot \sum_n a_n \cdot p_n = C \cdot E\xi.$$

3. Если случайная величина ξ принимает значения в промежутке $[a, b]$, то математическое ожидание $E\xi$ также принимает значения из этого промежутка.

Действительно, если $a \leq \xi \leq b$, то значения случайной величины a_n удовлетворяют условию $a \leq a_n \leq b$, следовательно, $a = Ea = \sum_n a \cdot p_n \leq \sum_n a_n \cdot p_n \leq \sum_n b \cdot p_n = Eb = b$.

4. $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.

Пусть случайные величины ξ и η имеют следующие таблицы распределения:

ξ	a_1	a_2	...	a_n	...
P	p_1	p_2		p_n	...

и

η	b_1	b_2	...	b_m	...
P	q_1	q_2		q_m	...

Тогда

$$\begin{aligned}
 E(\xi + \eta) &= \sum_{n,m} (a_n + b_m) \cdot P(\xi = a_n, \eta = b_m) = \\
 &= \sum_n \sum_m a_n \cdot P(\xi = a_n, \eta = b_m) + \sum_n \sum_m b_m \cdot P(\xi = a_n, \eta = b_m) = \\
 &= \sum_n a_n \cdot \sum_m P(\xi = a_n, \eta = b_m) + \sum_m b_m \cdot \sum_n P(\xi = a_n, \eta = b_m) = \\
 &= \sum_n a_n \cdot P(\xi = a_n) + \sum_m b_m \cdot P(\eta = b_m) = E\xi + E\eta,
 \end{aligned}$$

поскольку (см. 2.4.2)

$$\sum_m P(\xi = a_n, \eta = b_m) = P(\xi = a_n), \quad \sum_n P(\xi = a_n, \eta = b_m) = P(\eta = b_m).$$

Как следствие получаем

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_n).$$

5. Если ξ и η независимые случайные величины, тогда

$$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta).$$

Пусть ξ и η случайные величины, введенные в свойстве 4. Как показано в 2.4.3 для независимых случайных величин ξ и η выполняются равенства : $P(\xi = a_n, \eta = b_m) = P(\xi = a_n) \cdot P(\eta = b_m)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 E(\xi \cdot \eta) &= \sum_n \sum_m a_n \cdot b_m \cdot P(\xi = a_n, \eta = b_m) = \sum_n \sum_m a_n \cdot b_m \cdot P(\xi = a_n) \cdot P(\eta = b_m) = \\
 &= \left(\sum_n a_n \cdot P(\xi = a_n) \right) \cdot \left(\sum_m b_m \cdot P(\eta = b_m) \right) = E\xi \cdot E\eta.
 \end{aligned}$$

2.6.2. Дисперсия случайной величины

1. Пусть ξ - дискретная случайная величина со следующей таблицей распределения:

ξ	a_1	a_2	...	a_n	...
-------	-------	-------	-----	-------	-----

P	p_1	p_2		p_n	...
---	-------	-------	------	-------	-----

Определение. Дисперсией дискретной случайной величины ξ называется следующее число: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \sum_n (a_n - E\xi)^2 \cdot p_n$.

Для функции $\varphi(\xi)$ от случайной величины ξ (см. 2.3) дисперсия определяется так: $D\varphi(\xi) = E(\varphi(\xi) - E\varphi(\xi))^2 = \sum_n (\varphi(a_n) - E\varphi(\xi))^2 \cdot p_n$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность дискретных случайных величин с совместным распределением: $p_{k,i,\dots,j} = P(\xi_1 = a_k, \xi_2 = b_i, \dots, \xi_n = c_j)$. Для случайных величин $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, являющихся функциями от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ дисперсия определяется так:

$$Df(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{k,i,\dots,j} \left(f(a_k, b_i, \dots, c_j) - Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \right)^2 \cdot p_{k,i,\dots,j}.$$

2. Пусть ξ - непрерывная случайная величина со плотность распределения - $p_\xi(t)$.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины ξ называется следующее число: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E\xi)^2 \cdot p_\xi(t) dt$.

Для функции $\varphi(\xi)$ от случайной величины ξ (см. 2.3) дисперсия определяется так: $D\varphi(\xi) = E(\varphi(\xi) - E\varphi(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t) - E\varphi(\xi))^2 \cdot p_\xi(t) dt$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность непрерывных случайных величин с совместной плотностью распределения - $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Для случайных величин $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, являющихся функциями от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ дисперсия определяется так:

$$Df(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t_1, t_2, \dots, t_n) - Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \right)^2 \cdot p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Заметим, что величину $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$, $k \geq 2$ называют *центральным моментом порядка k* случайной величины ξ .

Рассмотрим *свойства* дисперсии.

$$1). D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Действительно, из определения дисперсии получаем

$$\begin{aligned} D\xi &= E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2) \\ &= E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2. \end{aligned}$$

$$2). D\xi \geq 0, \text{ причем}$$

$$D\xi = 0 \Leftrightarrow P(\xi = E\xi) = 1,$$

т.е. ξ — постоянная (здесь $\Leftrightarrow$ - знак эквивалентности утверждений).

Так как $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$, то $D\xi > 0$. Пусть $P(\xi = E\xi) = 1$, тогда $E\xi^2 = (E\xi)^2$, и, следовательно, по свойству 1

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 0.$$

Если $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = 0$, то $P(\xi - E\xi = 0) = 1$ или $P(\xi = E\xi) = 1$, поскольку $(\xi - E\xi)^2 \geq 0$.

Следствие. Если C — постоянная, то $DC = 0$.

Непосредственно из определения дисперсии получаем

$$DC = E(C - EC)^2 = E(C - C)^2 = 0.$$

$$3). D(C\xi + b) = C^2 \cdot D\xi, \text{ где } C \text{ и } b \text{ постоянные.}$$

Доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} D(C\xi + b) &= E(C\xi + b - E(C\xi + b))^2 = E(C\xi + b - EC\xi - Eb)^2 = \\ &= E(C\xi + b - C \cdot E\xi - b)^2 = C^2 \cdot E(\xi - E\xi)^2 = C^2 \cdot D\xi. \end{aligned}$$

Следствие: $D(C\xi + b) = C^2 \cdot D\xi$, $D(\xi + b) = 0$.

4. Если ξ и η независимые случайные величины, тогда

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta.$$

Это свойство получается из определения дисперсии с учетом независимости случайных величин ξ и η . На самом деле,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\xi + \eta) &= \mathbf{E}(\xi + \eta - \mathbf{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbf{E}(\xi + \eta - \mathbf{E}\xi - \mathbf{E}\eta)^2 = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi + \eta - \mathbf{E}\eta)^2 = \\ &= \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 - \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)\mathbf{E}(\eta - \mathbf{E}\eta) + \mathbf{E}(\eta - \mathbf{E}\eta)^2 = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta, \end{aligned}$$

поскольку если случайные величины ξ и η независимы, то случайные величины $\xi - \mathbf{E}\xi$ и $\eta - \mathbf{E}\eta$ также независимы (проверьте самостоятельно), поэтому по свойству 5 математического ожидания $\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta) = 0$.

Как следствие получаем: если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимые в совокупности случайные величины, то

$$\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \dots + \mathbf{D}\xi_n.$$

2.6.3 Примеры вычисления математического ожидания и дисперсии

1. Пусть ξ распределена по закону Бернулли с параметром p . Напомним, что таблица распределения выглядит так:

ξ	0	1
P	q	p

По определению математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины получаем:

$$\mathbf{E}\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \quad \mathbf{E}\xi^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p, \quad \mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

2. Пусть ξ распределена по биномиальному закону с параметрами n и p . Напомним, что таблица распределения выглядит так:

ξ	0	1	...	n
P	p_0	p_1	...	p_n

где $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k=0,1...n$.

Отметим, что случайную величину ξ можно представить в виде $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$; где ξ_i — независимые случайные величины, распределенные по закону Бернулли, и по следствию свойства 3 математического ожидания и свойства 4 дисперсии, получаем:

$$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = E\xi_1 + E\xi_2 + \dots + E\xi_n = n \cdot p,$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n = n \cdot p \cdot (1-p).$$

3. Пусть ξ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda, \lambda > 0$.

Напомним, что таблица распределения выглядит так:

ξ	0	1	...	n	...
P	p_0	p_1	...	p_n	...

где $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, k=0,1...n,...$

Вычислим:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Аналогично (проделайте самостоятельно) можно вычислить и дисперсию:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \right)^2 = \dots = \lambda.$$

4. Пусть ξ распределена по геометрическому закону с параметром $q, 0 < q < 1$. Тогда (вычислите самостоятельно):

$$\mathbf{E}\xi = \frac{1}{1-q}, \quad \mathbf{D}\xi = \frac{q}{(1-q)^2} \dots$$

5. Пусть ξ распределена равномерно на интервале $[a, b]$.

Вычислим:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi &= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t dt = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}, \\ \mathbf{E}\xi^2 &= \int_a^b t^2 \cdot \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t^2 dt = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^3}{b-a} = \frac{a^2 + a \cdot b + b^2}{3}, \\ \mathbf{D}\xi &= \mathbf{E}\xi^2 - \mathbf{E}(\xi)^2 = \frac{a^2 + a \cdot b + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

6. Пусть ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda, \lambda > 0$.

Вычислим:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi &= \int_0^{+\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \left| \text{по частям, замена: } t = u; \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = dv, dt = du, v = -e^{-\lambda t} \right| \\ &= -t \cdot e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = 0 + \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right) \Big|_0^{+\infty} = \lambda.\end{aligned}$$

Также легко получить значение для дисперсии $\mathbf{D}\xi = \lambda$ (проверьте самостоятельно).

7. Пусть ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2 .

Вычислим:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-(t-a)^2/2\sigma^2} dt = \left| \frac{t-a}{\sigma} = y; dt = \sigma dy, \right| \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma \cdot y) \cdot e^{-y^2/2} dy &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2/2} dy = a,\end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2/2} dy = 0.$$

$$D\xi = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 \cdot e^{-(t-a)^2/2\sigma^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot e^{-y^2/2} dy = \sigma^2.$$

2.6.4. Коэффициент корреляции случайных величин

Пусть ξ и η — случайные величины, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$. Вопросы взаимосвязи случайных величин (вид этой связи, ее количественная мера) возникают во многих задачах. Коэффициент корреляции один из числовых показателей линейной связи между случайными величинами.

Определение. Коэффициентом корреляции между случайными величинами ξ и η называется число $\rho(\xi, \eta) = \frac{E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}$.

Отметим, что $E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = \text{cov}(\xi, \eta)$ — называется ковариацией случайных величин ξ и η . Она характеризует меру линейной связи между случайными величинами.

Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то говорят, что случайные величины ξ и η некоррелируемые.

Рассмотрим **свойства** коэффициента корреляции.

1. Справедливо следующее равенство: $\rho(\xi, \eta) = \frac{E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}$.

Это свойство следует непосредственно из определения, поскольку

$$\begin{aligned} E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) &= E(\xi \cdot \eta - \eta \cdot E\xi - \xi \cdot E\eta + E\xi \cdot E\eta) = \\ &= E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta - E\xi \cdot E\eta + E\xi \cdot E\eta = E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta. \end{aligned}$$

2. Если случайные величины ξ и η независимы, то $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Следует из свойства 1, поскольку для независимых случайных величин ξ и η справедливо $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$.

Замечание 1. Обратное не верно!

Пример. Пусть случайная величина ξ имеет распределение с таблицей:

ξ	-1	0	1
P	0,25	0,5	0,25

и предположим, что $\eta = \xi^2$. Эти случайные величины являются зависимыми (проверьте самостоятельно). Вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi &= (-1) \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,25 = 0; \\ \mathbf{E}\eta &= (-1)^2 \cdot 0,25 + 0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,25 = 0,5; \\ \mathbf{E}(\xi \cdot \eta) &= \mathbf{E}\xi^3 = (-1)^3 \cdot 0,25 + 0^3 \cdot 0,5 + 1^3 \cdot 0,25 = 0. \end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbf{E}\xi \cdot \mathbf{E}\eta = 0 - 0 \cdot 0,5 = 0$, следовательно, $\rho(\xi, \eta) = 0$.

3. Справедливо следующее неравенство $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$.

Обозначим через $\xi_1 = \frac{\xi - \mathbf{E}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}$, $\eta_1 = \frac{\eta - \mathbf{E}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}$, тогда $\mathbf{E}\xi_1 = 0, \mathbf{E}\eta_1 = 0; \mathbf{D}\xi_1 = 1, \mathbf{D}\eta_1 = 1$.

Случайные величины ξ_1 и η_1 называются нормированными и центрированными.

Легко видеть, что

$$0 \leq \mathbf{D}(\xi_1 \pm \eta_1) = \mathbf{E}(\xi_1 \pm \eta_1)^2 = \mathbf{E}\xi_1^2 \pm 2\mathbf{E}(\xi_1 \cdot \eta_1) + \mathbf{E}\eta_1^2 = 2 \pm 2\mathbf{E}(\xi_1 \cdot \eta_1).$$

Так как $\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi} \cdot \sqrt{\mathbf{D}\eta}} = \mathbf{E}(\xi_1 \cdot \eta_1)$, то $0 \leq 2 \pm 2\rho(\xi \cdot \eta) \Rightarrow |\rho(\xi \cdot \eta)| \leq 1$.

4. $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют числа $a \neq 0, b$ такие, что $\mathbf{P}(\xi = a\eta + b) = 1$, т.е. ξ и η линейно зависимые случайные величины.

Докажем сначала достаточность. Пусть $\mathbf{P}(\xi = a\eta + b) = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(a \cdot \eta + b, \eta) &= \frac{\mathbf{E}((a \cdot \eta + b) \cdot \eta) - \mathbf{E}(a \cdot \eta + b) \cdot \mathbf{E}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}(a \cdot \eta + b)} \cdot \sqrt{\mathbf{D}\eta}} = \\ &= \frac{a \cdot \mathbf{E}\eta^2 + b \cdot \mathbf{E}\eta - a \cdot \mathbf{E}\eta \cdot \mathbf{E}\eta - b \cdot \mathbf{E}\eta}{\sqrt{a^2 \cdot \mathbf{D}\eta} \cdot \sqrt{\mathbf{D}\eta}} = \frac{a \cdot (\mathbf{E}\eta^2 - (\mathbf{E}\eta)^2)}{|a| \cdot \mathbf{D}\eta} = \frac{a \cdot \mathbf{D}\eta}{|a| \cdot \mathbf{D}\eta} = \frac{a}{|a|}, \end{aligned}$$

или $|\rho(\xi, \eta)| = 1$.

Докажем теперь необходимость. При доказательстве свойства 3 нами было получено следующее равенство

$$\mathbf{D}\left(\frac{\xi - \mathbf{E}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} \pm \frac{\eta - \mathbf{E}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}\right) = 2(1 \pm \rho(\xi \cdot \eta)).$$

Пусть $\rho(\xi, \eta) = 1$, тогда $D\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = 0$. По свойству 2 дисперсии получаем, что $P\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} = 0\right) = 1$. Отсюда $P(\xi = a\eta + b) = 1$, где

$$a = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}, b = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}(E\xi - E\eta).$$

Пусть $\rho(\xi, \eta) = -1$; тогда $D\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} + \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = 0$. По свойству 2 дисперсии получаем, что $P\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} + \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} = 0\right) = 1$. Отсюда $P(\xi = a\eta + b) = 1$, где

$$a = -\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}, b = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}(E\xi + E\eta).$$

Замечание 2. Чем сильнее связь между случайными величинами, тем больше и величина коэффициента корреляции. При $\rho(\xi, \eta) \neq 0$ этот показатель характеризует не только наличие связи между ξ и η , но и её степень. При положительной (или прямой) связи, когда большим значениям одной случайной величины соответствуют большие значения другой, коэффициент корреляции больше нуля. А при отрицательной (или обратной) связи, когда большим значениям одной случайной величины соответствуют меньшие значения другой, коэффициент корреляции меньше нуля. Недостатком $\rho(\xi, \eta)$ является то, что он характеризует только линейные связи. При наличии нелинейной связи следует использовать другие показатели связи.

Пример 2. Изготавливаемые в цехе втулки сортируются по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм, по овальности на четыре группы со значениями 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм. Совместное распределение отклонений диаметра (ξ) и овальности (η) втулок задано таблицей:

$\eta \mid \xi$	0,01	0,02	0,03	0,04
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06

0,006	0,04	0,10	0,08	0,08
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02

Вычислим коэффициент корреляции между ξ и η .

Найдем сначала частные распределения случайных величин ξ и η . Согласно 2.4.2, например,

$$P(\xi = 0,01) = 0,01 + 0,03 + 0,04 + 0,02 = 0,10$$

и т.д. (остальные вычисления проведите самостоятельно) получим следующую таблицу распределения случайной величины ξ :

ξ	0,01	0,02	0,03	0,04
P	0,1	0,4	0,3	0,2

также таблицу распределения случайной величины η :

η	0,002	0,004	0,006	0,008
P	0,11	0,48	0,3	0,11

Теперь вычислим математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η :

$$E\xi = 0,01 \cdot 0,1 + 0,02 \cdot 0,4 + 0,03 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,2 = 0,026;$$

$$E\eta = 0,003 \cdot 0,11 + 0,004 \cdot 0,48 + 0,006 \cdot 0,3 + 0,008 \cdot 0,11 = 0,00482;$$

$$D\xi = 0,0000086, \quad D\eta = 0,0000025$$

(проверьте самостоятельно!).

Остается вычислить величину $E(\xi \cdot \eta)$:

$$E(\xi \cdot \eta) = 0,01 \cdot 0,002 \cdot 0,01 + 0,04 \cdot 0,008 \cdot 0,02 = 0,0001274.$$

Используя свойство 1 коэффициента корреляции получим

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}} = 0,141.$$

Полученный результат показывает, что между отклонением внутреннего диаметра от номинального размера и овальностью втулок имеется слабая прямая связь.

Задачи к 2.6

1. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов – есть нормально распределённая случайная величина со среднеквадратическим отклонением $\sigma=560$ и неизвестным математическим ожиданием a . В 90% случаев число ежемесячных заказов превышает 12000. Найдите среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

2. Масса товаров, помещаемых в контейнер определённого размера, - нормально распределённая случайная величина. Известно, что 65% контейнеров имеют чистую массу меньшую, чем 4 т. Найдите среднюю и среднеквадратическое отклонение чистой массы контейнера.

3. Представитель фирмы, торгующей оборудованием для тяжёлой промышленности, ежедневно встречается с 1 или 2 покупателями с вероятностями 0,4 и 0,6. В результате каждой встречи продавец может реализовать оборудование на 50000 условных денежных единиц с вероятностью 0,8. Составьте распределение ежедневных продаж. Найдите математическое ожидание и дисперсию стоимости продаж.

4. Приблизительно 5% бутылок бракуется на линии из-за серьёзных трещин в стекле. Если 3 бутылки отобраны случайно, найдите среднюю и дисперсию числа бутылок, имеющих серьёзные дефекты.

5. Средний годовой возврат (процент доходности) некоторой акции составляет 6,5%. Дисперсия этого возврата равна 2,3. Для другого типа акций средняя доходность составляет 6,4% в год, а дисперсия равна 3,4. Покупка какой из акций более рискованная? Почему?

6. Доход от некоторого рискованного бизнеса составляет сумму около 1000 условных денежных единиц с заданной таблицей распределения:

a_i	-2000	-1000	0	1000	2000	3000
P	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

Замечание: -2000; -1000 означают убыток.

а) Какой наиболее вероятный денежный доход рискованного бизнеса?

б) Является ли этот риск вероятно-успешным? Объясните.

в) Чему равен на длительный период средний доход от этого бизнеса?

г) Какова хорошая мера риска вложений в такое рискованное предприятие? Почему? Вычислите меру.

7. На факультете в среднем 15% студентов получают неудовлетворительные оценки при сдаче экзамена по теории вероятностей и математической статистике. Предположим, что в группе 25 студентов.

1. Чему равна вероятность того, что двое студентов не сдадут экзамен?

2. Чему равна вероятность того, что четверо студентов не сдадут экзамен?

3. Чему равна вероятность того, что трое или больше студентов не сдадут экзамен?

4. Чему равно ожидаемое среднее число студентов, которые не сдадут экзамен?

8. В случае нормальной настройки автоматического станка только 1% выпускаемых деталей - дефектные. Предположим, что автомат настроен нормально.

1. Из большой партии выпущенных деталей случайно отобраны две. Чему равна вероятность того, что одна из них с дефектом?

2. Из большой партии выпущенных деталей случайно отобраны пять штук. Чему равна вероятность того, что все они без дефектов?

3. Дневной выпуск деталей составил 200 штук. Чему равно ожидаемое среднее число дефектных деталей?

9. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

10. Клиенты банка, не связанные друг с другом не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращённых в срок кредитов из 4 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию этой случайной величины.

11. Абонент забыл последнюю цифру нужного ему номера телефона, однако помнит, что она нечётная. Составит закон распределения числа сделанных им наборов номера телефона до попадания на нужный номер, если последнюю цифру он набирает наудачу, а набранную цифру в дальнейшем не набирает. Найти математическое ожидание и функцию распределения этой случайной величины.

12. Дана функция

$$p_{\xi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ Cte^{-t} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

При каком значении параметра C эта функция является плотностью. распределения некоторой непрерывной случайной величины ξ ? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ .

13. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задан в таблице

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

Определить а) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η ; б) коррелированы или некоррелированы эти случайные величины?

14. Рассматривается двумерная случайная величина (ξ, η) , где ξ – поставка сырья, η – поступление требования на него (см. задачу 1 из 2.4.3). Известно, что поступление сырья и поступление требования на него могут произойти в любой день месяца (30 дней) с равной вероятностью. Определить а) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η ; б) коррелированы или некоррелированы эти случайные величины.

15. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена равномерно внутри квадрата R с центром в начале координат. Стороны квадрата равны $\sqrt{2}$ и составляют

углы 45° с осями координат. Определить а) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η ; б) коррелированы или некоррелированы эти случайные величины.

16. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины (ξ, η)

$\eta \backslash \xi$	2	5
8	0,15	0,10
10	0,22	0,23
12	0,10	0,20

Найти коэффициент корреляции между величинами ξ и η .

2.7. Предельные теоремы теории вероятностей

2.7.1. Сходимость последовательности случайных величин по вероятности

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ — последовательность случайных величин.

Определение. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ сходится к числу a по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\mathbf{P}(|\xi_n - a| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

(т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\xi_n - a| \geq \varepsilon) = 0$)

Эту сходимость обозначают так:

$$\overset{P}{\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}} a \text{ или } \overset{P}{\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}} a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

2.7.2. Закон больших чисел

Пусть существуют $E\xi_n = a_n$. Рассмотрим следующую разность

$$\bar{S}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Нас интересует поведение $\bar{S}_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение. Будем говорить, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ подчиняется закону больших чисел (ЗБЧ), если $\bar{S}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a$.

Замечание. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — случайные величины, имеющие одинаковое распределение. Тогда $a_n = a$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ интерпретируются как измерения некоторой физической величины a . Так как точные измерения невозможны, то $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность случайных величин, тогда ЗБЧ означает, что среднее арифметическое первых n измерений хорошо аппроксимирует a :

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \sim a.$$

Теорема 1 (неравенство Чебышева). Для любой случайной величины ξ , имеющей математическое ожидание ($E\xi < \infty$), при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую случайную величину η

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi - E\xi| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |\xi - E\xi| < \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot D\xi = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot E(\xi - E\xi)^2 = E\left(\frac{\xi - E\xi}{\varepsilon}\right)^2 = E\left(\eta \cdot \frac{(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2}\right) \geq E\eta,$$

поскольку $\eta \cdot \frac{(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} \geq \eta$.

С другой стороны

$$E\eta = 1 \cdot P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) + 0 \cdot P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) = P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon).$$

Тогда получаем $\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}$..

Замечание. На практике весьма полезным является неравенство Маркова (приведем без доказательства).

Неравенство Маркова. Для любой случайной величины ξ с положительными значениями, имеющей математическое ожидание ($\mathbf{E}\xi < \infty$), при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(\xi > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}\xi}{\varepsilon}.$$

Приведем несколько теорем, которые относятся к законам больших чисел.

Теорема 2 (Я. Бернулли). Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда $\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{E}\frac{\mu_n}{n} = p$, то неравенство Чебышева (возьмем $\xi = \frac{\mu_n}{n}$) нам дает:

$$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}\xi| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{D}\left(\frac{\mu_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\mathbf{D}\mu_n}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{n \cdot p(1-p)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3 (Чебышева). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{E}\xi_k = a, k=1, 2, \dots$ и конечной дисперсией $\mathbf{D}\xi_k = \sigma^2, k=1, 2, \dots$, и пусть, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

В частности,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)=a, \quad \mathbf{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{n \cdot \sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n},$$

то воспользовавшись неравенством Чебышева мы получим требуемое.

Пример. Технический контролер проверяет партию однотипных приборов. С вероятностью 0,01 прибор может иметь дефект A и, независимо от этого, с вероятностью 0,02 - дефект B . В каких границах будет заключено практически наверняка число бракованных изделий в партии из 1000 штук, если за вероятность практической достоверности принимается 0,997?

Обозначим через μ_n —число бракованных изделий в партии из $n = 1000$ штук, $\mathbf{E}\mu_n = np$, где p —вероятность иметь дефекта для одного прибора. Найдем p :

$$p = \mathbf{P}(\bar{A}B \cup A\bar{B} \cup AB) = \mathbf{P}(\bar{A}B) + \mathbf{P}(A\bar{B}) + \mathbf{P}(AB) =$$

$$0,01 \cdot 0,98 + 0,02 \cdot 0,99 + 0,01 \cdot 0,02 \cong 0,03.$$

Отсюда,

$$\mathbf{E}\mu_n = 1000 \cdot 0,03 = 30, \quad \mathbf{D}\mu_n = npq = 30 \cdot 0,97 = 29,1.$$

Из неравенства Чебышева, получим

$$\mathbf{P}(|\mu_n - \mathbf{E}\mu_n| < \varepsilon) = 1 - \mathbf{P}(|\mu_n - \mathbf{E}\mu_n| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\mu_n}{\varepsilon^2},$$

и по условию задачи, правая часть этого неравенства превосходит 0,997, т.е.

$$1 - \frac{\mathbf{D}\mu_n}{\varepsilon^2} > 0,997. \text{ Отсюда найдем } \varepsilon: \frac{29,1}{\varepsilon^2} < 0,003 \Leftrightarrow \varepsilon^2 > \frac{29,1}{0,003} \approx 9700.$$

Следовательно, минимальное $\varepsilon \approx 98$. Тогда из $|\mu_n - 30| < 98$ получим $0 < \mu_n < 128$.

2.7.3. Центральная предельная теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ — последовательность независимых случайных величин.

Обозначим $\mathbf{E}\xi_k = a_k, \mathbf{D}\xi_k = \sigma_k^2, B_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Если последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$

подчиняется ЗБЧ, то в правой части приближенного равенства

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \sim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

стоит неслучайная величина. Нас интересует вопрос: насколько вероятны отклонения левой части от правой.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) утверждает: *при некоторых условиях функция распределения суммы неограниченно растущего числа случайных величин сходится к нормальной функции распределения, т.е.*

$$\mathbf{P} \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - \sum_{k=1}^n a_k}{\sqrt{B_n}} < x \right) \rightarrow \Phi(x) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где, напомним, $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Приведем одну из многочисленных теорем, объединенных под общим названием «центральные предельные теоремы».

Теорема (Леви). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{E}\xi_k = a, k=1, 2, \dots$ и конечной дисперсией $\mathbf{D}\xi_k = \sigma^2, k=1, 2, \dots$, тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо

$$\mathbf{P} \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^n (\xi_k - a) < x \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Доказательство теоремы Леви можно найти в [3,5].

Замечание. Приведенные ранее теоремы Муавра-Лапласа тоже относятся к центральным предельным теоремам.

Пример. Производится выборочное обследование партии лампочек для определения средней продолжительности их горения. Каков должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9876, утверждать, что средняя продолжительность горения лампочки по всей партии отклонялась от средней, полученной в выработке, не более чем на 10 ч., если среднеквадратическое отклонение продолжительности горения лампочки равно 80 ч.

Пусть n — число требуемых лампочек, ξ_k — продолжительность горения k -й лампочки, $k = 1, 2, \dots, n$, и по условию $\sigma = 80$. Из условий следует, что должно выполняться

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbf{E} \xi_k)\right| < 10\right) \geq 0,9867.$$

С другой стороны, по центральной предельной теореме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbf{E} \xi_k)\right| < 10\right) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{80 \cdot \sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbf{E} \xi_k)\right| < \frac{\sqrt{n}}{8}\right) \sim \\ &\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{8}\right) = \Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения n : $2 \cdot \Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0,9867$. Из таблицы значений функции $\Phi_0(x)$ (см. Таблицу 1 Приложения) находим $n = 400$, так как из $\Phi_0(x) = 0,4938$ находим $x = 2,5$, следовательно $\sqrt{n} = 8 \cdot 2,5 = 20$.

Задачи 2.7

1. В результате анализа торговой деятельности некоторого магазина установлено, что среднемесячные издержки обращения составляют 300 у.е. Оцените вероятность того, что в очередном месяце издержки не выйдут за пределы 280-320 у.е. Известно, что дисперсия равна 16 у.е.

2. Партия деталей размещена в 250 ящиках. Для определения средней массы детали в партии было взято по одной детали из каждого ящика. При условии, что дисперсия по каждому ящику не превышает 4, определите максимальное отклонение средней массы детали в выборке от средней массы её во всей партии. Результат необходимо гарантировать с вероятностью не менее 0,9.

3. Инвестор покупает ценные бумаги за счёт займа, взятого с процентной ставкой r под залог недвижимости. Процентная ставка на ценные бумаги ξ — случайная величина с $\mathbf{E} \xi = a$, $a > r$, $\mathbf{D} \xi = \sigma^2$. Какова вероятность того что инвестор не сможет вернуть долг и лишится своей недвижимостью?

4. Среднее изменение курса акций компании в течение одних биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более, чем на 3%.

5. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено: а) не более 200 клиентов; б) более 150 клиентов.

6. Вероятность того, что акции, переданные на депозит, будут востребованы, равна 0,08. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 1000 клиентов от 70 до 90 востребуют свои акции.

7. Бензоколонка N заправляет легковые и грузовые автомобили. Вероятность того, что проезжающий легковой автомобиль подъедет на заправку, равна 0,3. С помощью неравенства Чебышева найти границы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,79, находится доля заправившихся в течение 2 ч легковых автомобилей, если за это время всего заправилось 100 автомобилей.

8. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,1 не более чем на 0,01 (по абсолютной величине).

9. Электростанция обслуживает сеть на 1600 электроламп, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0,9. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число ламп, включенных в сеть вечером, отличается от своего математического ожидания не более чем на 100 (по абсолютной величине). Найти вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

10. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70% числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц чтобы с вероятностью не меньшей 0,95, ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от математического ожидания их не превышало 50 (по абсолютной величине)? Решить задачу с помощью: а) неравенства Чебышева; б) интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

11. Сколько нужно произвести измерений, чтобы с вероятностью, равной 0,9973, утверждать, что погрешность средней арифметической результатов этих измерений не превысит 0,01, если измерение характеризуется среднеквадратическим отклонением, равным 0,03?

2.8. Дискретные цепи Маркова

2.8.1. Определения

Как мы помним, ярким примером класса независимых случайных величин является последовательность бернуллиевских случайных величин. Здесь же мы рассмотрим важный класс зависимых случайных величин, образующих так называемую *цепь Маркова*.

Пусть $\{\Omega, F, P\}$ – некоторое вероятностное пространство, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность случайных величин со значениями в некотором множестве X .

Определение. Если при предположении

$$P(\xi_k = a_k, \xi_{k-1} = a_{k-1}, \dots, \xi_0 = a_0) > 0$$

для любого $k \geq 1$ выполнено условие

$$P(\xi_{k+1} = a_{k+1} / \xi_k = a_k, \dots, \xi_0 = a_0) = P(\xi_{k+1} = a_{k+1} / \xi_k = a_k) \quad (1),$$

то последовательность $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ называется *цепью Маркова*.

Множество X называется *фазовым пространством* или *пространством состояний цепи*.

Замечание. Если воспользоваться равенством

$$P(A \cap B / C) = P(A / B \cap C) \cdot P(B / C),$$

то из (1) получим следующее:

$$\begin{aligned} &P(\xi_n = a_n, \dots, \xi_{k+1} = a_{k+1} / \xi_k = a_k, \dots, \xi_0 = a_0) \\ &= P(\xi_n = a_n, \dots, \xi_{k+1} = a_{k+1} / \xi_k = a_k) \end{aligned} \quad (2)$$

Это равенство допускает наглядную интерпретацию: если ξ_k трактовать, например, как число клиентов в системе массового обслуживания в «настоящий» момент, $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ – в «прошлом», $(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ – в «будущем», тогда

соотношение (2) означает, что при фиксированных «прошлом» и «настоящем» «будущее» зависит лишь от «настоящего» и не зависит от того, каким способом система оказалась в состоянии ξ_k , т.е. не зависит от “прошлого”. Иначе говоря, из (2) следует, что при фиксированном “настоящем” “будущее” и “прошлое” оказываются независимыми. Свойство независимости “будущего” и “прошлого” принято называть *свойством Маркова*, а соответствующую последовательность *цепью Маркова*.

Будем считать, что фазовое пространство X состоит из конечного или счетного множества целочисленных точек: $X = \{0, 1, \dots, N, \dots\}$. Вероятности $p_i = \mathbf{P}(\xi_0 = i)$, $i \in X$ - называют *начальными вероятностями* (распределение – *начальным распределением*), а матрицу

$$\mathbf{P} = \|p_{ij}(k)\|, \text{ где } p_{ij}(k) = \mathbf{P}(\xi_k = j / \xi_{k-1} = i)$$

называют *матрицей переходных вероятностей* в момент k ($k=1, \dots, n$).

В том случае, когда $p_{ij}(k)$ - не зависят от k , то цепь $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ – называется *однородной цепью Маркова*. Свойства однородных цепей полностью определяются начальными вероятностями p_i и переходными вероятностями p_{ij} . В конкретных случаях для описания эволюции цепи вместо явного выписывания матрицы используют граф (диаграмму состояний), где вершины характеризуют состояния цепи, а стрелки, идущие из одного состояния в другое – вероятности перехода.

Пример. Пусть на стоянку такси в единичные моменты времени прибывают (по одной в каждый момент) машины. Если на стоянке ожидающих клиентов нет, то машина немедленно уезжает. Обозначим через η_k – число ожидающих клиентов, приходящих в момент k на стоянку, и предположим, что $\eta_1, \dots, \eta_n$ - независимые случайные величины. Пусть ξ_k – длина очереди в момент k , $\xi_0 = 0$. Тогда, если $\xi_k = i$, то в следующий момент $k+1$ длина очереди ξ_{k+1} станет равной j , где

$$j = \begin{cases} \eta_{k+1}, & \text{если } i = 0, \\ (i - 1 + \eta_{k+1}), & \text{если } i \geq 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить (проверьте самостоятельно), что последовательность $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ образуют цепь Маркова.

2.8.2. Уравнение Колмогорова-Чепмена

Обозначим через

$$p_{ij}^{(k)} = \mathbf{P}(\xi_k = j / \xi_0 = i) = \mathbf{P}(\xi_{k+m} = j / \xi_m = i)$$

вероятность перехода за k шагов из состояния i в состояние j , а через $\mathbf{P}^{(k)}$ - матрицу переходных вероятностей за k шагов. Пользуясь формулой полной вероятности и свойством Маркова легко получить уравнение Колмогорова-Чепмена:

$$p_{ij}^{(k+m)} = \sum_l p_{il}^{(k)} \cdot p_{lj}^{(m)}$$

или в матричной форме: $\mathbf{P}^{(k+m)} = \mathbf{P}^{(k)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(k+m)} &= \mathbf{P}(\xi_{k+m} = j / \xi_0 = i) = \sum_l \mathbf{P}(\xi_{k+m} = j, \xi_k = l / \xi_0 = i) = \\ &= \sum_l \mathbf{P}((\xi_{k+m} = j / \xi_k = l)) \cdot \mathbf{P}(\xi_k = l / \xi_0 = i) = \sum_l p_{il}^{(k)} \cdot p_{lj}^{(m)}. \end{aligned}$$

Замечание. В частности, $\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)} \cdot \mathbf{P}$ или $\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(k)}$.

2.8.3. Эргодичность. Стационарные вероятности

Влияние начального состояния на вероятность нахождения системы в том или ином состоянии исчезает с ростом времени, т.е. вероятности $p_{ij}^{(n)}$ сходятся к предельным значениям π_j , не зависящим от i и образующим распределение вероятностей: $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N \geq 0$, $\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_N = 1$.

Следующая теорема описывает широкий класс цепей Маркова, обладающих так называемым свойством *эргодичности*: пределы $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ не только существуют, не зависят от i , образуют распределение вероятностей, но и таковы, что $\pi_j > 0$ для всех j .

Теорема (Эргодическая). Пусть $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$ матрица переходных вероятностей цепи Маркова с конечным множеством состояний $X = \{0, 1, \dots, N\}$.

А) Если найдется n_0 такое, что

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0 \quad (1),$$

то существуют числа $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N$ такие, что

$$\pi_j > 0, \sum_j \pi_j = 1 \quad (2),$$

и для любого $i \in X$

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3).$$

Б) Обратно, если существуют числа $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N$, удовлетворяющие условиям (2), (3), то найдется n_0 такое, что выполнено условие (1).

С) Числа $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N$ удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_k \pi_k \cdot p_{kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Отметим, что последняя система играет большую роль в теории цепей Маркова. Всякое её неотрицательное решение $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$, удовлетворяющее условию $\sum_j \pi_j = 1$ принято называть *стационарным* или *инвариантным* распределением вероятностей для цепей Маркова.

В заключение этого раздела перечислим основные вопросы, связанные с цепями Маркова.

- 1) Существуют ли пределы $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$, не зависящие от i ?
- 2) Образуют ли пределы $(\pi_0, \pi_1, \dots)$ распределение вероятностей, т.е.
 $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$?
- 3) Является ли цепь эргодической, т.е. таковы ли пределы $(\pi_0, \pi_1, \dots)$, что
 $\pi_j > 0, \sum_j \pi_j = 1$?
- 4) Существует ли единственное стационарное распределение вероятностей $(\pi_0, \pi_1, \dots)$, т.е. такие, что $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$ и $\pi_j = \sum_k \pi_k \cdot p_{kj}, j \in X$, где $X = \{0, 1, \dots\}$

Для получения ответа на эти вопросы сначала проведем классификацию состояний цепи Маркова.

2.8.4. Классификация состояний цепи Маркова

Определение 1. Будем называть состояние $i \in X$ *несущественным*, если из него с положительной вероятностью можно за конечное число шагов выйти, но нельзя в него вернуться, т.е. существуют такие m и j , что $p_{ij}^{(m)} > 0$, но для всех n и j $p_{ji}^{(n)} = 0$.

Состояния, которые не являются несущественными называются *существенными*. Рассмотрим множество существенных состояний.

Определение 2. Существенные состояния i и j называются *сообщающимися*, если существуют такие n и m , что $p_{ij}^{(m)} > 0$ и $p_{ji}^{(n)} > 0$.

Следовательно, множество существенных состояний разбиваются на конечное или счетное число непересекающихся множества $E_1, E_2, \dots$, такие, что переходы между различными множествами невозможны. Эти множества называются *неразложимыми*. Если цепь состоит из одного неразложимого класса, то такая цепь называется *неразложимой* или *неприводимой* цепью.

Определение 3. Состояние j имеет период $d=d(j)$, если выполнены следующие условия:

- 1) $p_{jj}^{(n)} > 0$ только для тех n , которые имеют вид $n = dm$ (m – целое число);
- 2) d есть наименьшее из чисел, удовлетворяющих условию 1).

Замечание. Если $p_{jj}^{(n)} = 0$ для всех $n > 1$, то полагаем, что $d(j)=0$. Если же $d(j)=1$, то состояние j называется *апериодическим*.

Если цепь Маркова неразложимая, т.е. состоит из одного класса сообщающихся существенных состояний, то, если одно состояние имеет период d , все состояния также имеют тот же период, и он называется *периодом этого класса* (или *периодом цепи Маркова*).

Обозначим через $f_{ii}^{(k)} = \mathbf{P}(\xi_k = i, \xi_0 = i, \xi_l \neq i \text{ для } \forall l, 1 \leq l \leq k-1)$ – вероятность первого возвращения в состояние i за k шагов; и для $i \neq j$ через $f_{ij}^{(k)} = \mathbf{P}(\xi_k = j, \xi_0 = i, \xi_l \neq j \text{ для } \forall l, 1 \leq l \leq k-1)$ – вероятность впервые попасть в состояние j за k шагов, выйдя из состояния i .

Теперь без доказательства приведем следующую формулу:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)}.$$

Обозначим через $f_{ii} = \sum_n f_{ii}^{(n)}$ - вероятность рано или поздно вернуться впервые в состояние i , выйдя из него.

Определение 4. Состояние i называется возвратным, если $f_{ii} = 1$, и невозвратным, если $f_{ii} < 1$.

Далее, обозначим через $\mu_i^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)} \right)^{-1}$.

Определение 5. Возвратное состояние i называется положительным, если $\mu_i^{-1} > 0$, и нулевым, если $\mu_i^{-1} = 0$.

В заключение этого раздела сформулируем несколько полезных теорем без доказательств.

Теорема 1. А) Состояние i возвратное тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

В) Если состояние j возвратное, и i и j – сообщающиеся состояния, то состояние i тоже возвратное.

Теорема 2. В неразложимой цепи Маркова все состояния принадлежат одному типу, а именно

- 1) Если хотя бы одно состояние возвратное, то все остальные - тоже.
- 2) Если хотя бы одно состояние нулевое, то все остальные - тоже.
- 3) Если хотя бы одно состояние периодическое, то все остальные – тоже с одним и тем же периодом.

Теорема 3. Пусть цепь Маркова неразложимая, непериодическая. Тогда существуют пределы $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$, и при этом

А) все они равны нулю, если все состояния невозвратные или возвратные нулевые;

В) все они положительные, если все состояния возвратные ненулевые, и они находятся как решение следующей системы уравнений

$$\pi_j = \sum_k \pi_k \cdot p_{kj}.$$

Задачи к 2.8

1. Книги А, В и С лежат в стопке. С вероятностью $1/3$ выбирается одна из книг и кладется сверху. Состояние цепи Маркова – порядок книг в стопке. Провести полный анализ этой цепи Маркова.

2. В двух урнах размещены три шара. С вероятностью $1/3$ достают один из трех шаров и перекладывают его на урну, в которой он находится, в другую. Состояние цепи Маркова – число шаров в первой урне. Провести полный анализ цепи Маркова.

3. В каждой из двух урн находится по три шара, причем из этих шести шаров три белых и три черных. Случайным образом вытаскивается один шар из первой урны, один – из второй и они меняются местами. Состояние цепи Маркова – число белых шаров в первой урне. Провести полный анализ цепи Маркова.

2.9. Дополнительные задачи к Главе 2

1. Троллейбус имеет интервал движения 8 мин, поезд метро – 2 мин. Определить закон распределения суммарного времени ожидания транспорта наугад взятым пассажиром, пользующимся троллейбусом и метро (без пересадок).

2. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

3. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 2. Найти распределение случайной величины $\eta = \xi(1 + \xi)$.

4. Случайная величина ξ равномерно распределена на $[-2, 2]$. Найти распределение случайной величины $\eta = \max\{|\xi|, \xi - 1\}$.

5. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти распределение случайной величины $\eta = \min\{\xi^2, 2\xi - 1\}$.

6. Монета бросается до выпадения первого герба. Затем, если герб выпал на n -м бросании, то бросают монету еще $2n$ раз. Найти вероятность того, что при второй серии бросании герб выпал ровно k раз.

7. N раз с одинаковой вероятностью проводят одно из трех испытаний Бернулли с вероятностями успеха p_1, p_2, p_3 , соответственно. Найти вероятность того, что общее число успехов равно k .

8. Проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p . После первой неудачи p меняется на p_1 . Найти вероятность того, что k -й общий успех появится на m -м месте.

9. Пусть X_1, X_2 и X_3 независимые непрерывные случайные величины с плотностью распределения

$$p(t) = \begin{cases} \sqrt{2} - t, & \text{при } 0 < t < \sqrt{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найти вероятность того, что ровно 2 из 3-х величин принимают значения больше 1.

10. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задан таблицей:

ξ	η		
	-2	-1	0
0	0,1	0,2	0,1
1	0,1	0	0,1
2	0,2	0,1	0,1

Найти:

- одномерные распределения случайных величин ξ и η
- математические ожидания $E\xi, E\eta$
- дисперсии $D\xi, D\eta$
- коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$.
- условное распределение $P(\xi = 1 / \xi + \eta = 0)$.

11. Дана (ξ, η) - двумерная случайная величина. Ее плотность распределения: $p(x, y) = A(2x + y)$ в области $U = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Вне области U плотность равна 0.

Найти:

1. коэффициент A ;
2. одномерные плотности распределения ξ и η
3. математические ожидания $E\xi$, $E\eta$
4. вероятность $P\{(\xi, \eta) \in G\}$, где $G = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

12. Случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен в единичном круге с центром в нуле. Найти $D(\xi - \eta)$.

13. Точка произвольным образом бросается в круг единичного радиуса. Найти коэффициент корреляции между ее декартовыми координатами.

14. Вероятность рождения мальчика равна 0,512. Рассматриваются 10000 новорожденных. Найти вероятность того, что среди них мальчиков по крайней мере на 200 больше, чем девочек.

15. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0,2, 4 с вероятностью 0,4, 3 с вероятностью 0,3 и 2 с вероятностью 0,1. За время обучения он сдает 50 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 лежит средний балл.

16. Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7,2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 1 миллион карточек. Найти вероятность того, что никто не угадал 6 номеров. Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы один угадал 6 номеров.

17. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1,5	2	2,5
P	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0,975 урожай был не менее тонны.

18. Пусть матрица переходных вероятностей цепи Маркова следующая

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } p, q \geq 0 \text{ и } p+q = 1. \text{ Провести полный анализ цепи Маркова в}$$

зависимости от значения p .