

Задачник по Теории Игр

Задачи к § 1

1.1 Школьник сдал выпускные экзамены в своей школе и теперь должен решить, в какой университет он будет поступать. У него на выбор есть возможности получения экономического, юридического, гуманитарного, математического и технического образования. Но политическая ситуация в стране нестабильная, вскоре ожидаются президентские выборы. Основными претендентами на успех по экспертным оценкам являются кандидаты от партий консерваторов, социал-демократов, коммунистов и “зелёных”. В зависимости от победы того или иного кандидата в стране будет сделана ставка на ту или иную социально-трудовую политику. Поэтому профессия, которую получит Школьник, будет по-разному цениться при разных политических режимах. Сформулируйте задачу как матричную A -игру с составлением матрицы потерь Школьника.

1.2 Рассмотрим следующую игру. Каждый из двух игроков показывает один или два пальца и одновременно пытается угадать число пальцев, показанных противником. Если один из игроков угадал правильно, то он выигрывает сумму, равную общему числу пальцев, показанных обоими игроками. Во всех остальных случаях игра заканчивается вничью. Сформулируйте задачу как матричную игру и составьте матрицу потерь Первого игрока.

1.3 Американский президент Джордж Буш пытается пленить иракского диктатора Саддама Хусейна. Буш знает, что штаб Хусейна расположен в одном из иракских городов: Багдаде (столице Ирака), Мосуле, Басре, Киркуке или в Эрбиле, но не знает точно в каком. У Буша есть варианты (стратегии), какими видами войск или вооружения воспользоваться: сухопутными войсками (пехота), авиацией, ракетными войсками, космическим оружием. Буш должен наносить удар по всем городам, чтобы заведомо уничтожить Хусейна. Очевидно, что затраты (потери) Буша при выборе им той или иной своей стратегии и нанесении удара по городам – различны. Сформулируйте задачу как матричную A -игру и составьте матрицу потерь Первого игрока.

В задачах 2.4-2.10 согласно описанной ситуации формализуйте матричную игру и составьте A -матрицу потерь Первого игрока.

1.4 На Солдата движется шеренга из 5 неприятельских танков. Он может сделать 2 выстрела. Он победит, если поразит командирский танк. Средний танк он поражает: с вероятностью 1; фланговые – с вероятностью 0,1; остальные – с вероятностью 0,2.

1.5 Каждая из сторон имеет 3 боевые единицы: танк, саперов и автоматчиков. Нужно расставить 2 из них на 2 позиции, а 1 оставить в резерве. Выигрыш равен числу выигранных

позиций. Саперы побеждают танк с вероятностью 0,7; автоматчики побеждают саперов с вероятностью 0,7; танк побеждает автоматчиков наверняка.

1.6 Три друга решили ехать поездом. В нужном направлении идут 3 поезда, на один из них могут напасть бандиты. Друзья считают, что вероятность погибнуть от рук бандитов в 1,5 раза выше для того, кто едет в одиночку.

1.7 Илья Муромец может поехать либо вправо, либо влево, либо прямо, либо повернуть назад. Змей Горыныч может оказаться либо слева, либо прямо, либо справа, но никак не сзади. Слева и справа Илья Муромец побеждает с вероятностью 0,7; погибает с вероятностью 0,3. Прямо он побеждает наверняка. Если же он не найдёт Змея Горыныча, то вернуться ему не суждено. Он считает, что в 9 раз более ценно победить, чем уцелеть.

1.8 Бомбить аэродром отправляются 5 самолётов, 1 из них – бомбардировщик. Противник может выстрелить по одному из самолётов. При выстреле по самолёту он поражает летящий первым с вероятностью 0,6; летящий вторым, третьим, четвертым или пятым – с вероятностью 0,5. Аэродром считается разбомбленным, если бомбардировщик уцелел.

1.9 Некто может купить 1 коробок спичек в одном из трёх магазинов или 2 коробка в разных магазинах. Он уверен, что не более чем в двух из коробков спички сырые. Оставшись без сухих спичек, Некто несёт ущерб, равный стоимости 5 коробков.

1.10 Клад спрятан в одном из 5 гротов пещеры. Можно обследовать либо 2 из трех ближайших гротов, либо один из двух более удалённых.

1.11 Пусть Студент (Первый игрок) предполагает сдать зачет Преподавателю (Второму игроку). Чтобы получить зачет, Студент должен ответить правильно хотя бы на два из трех предложенных вопросов. Сформулируйте задачу как простую A -игру, составьте матрицу потерь Студента.

Задачи к § 2

2.1 В следующих простых A -играх найдите верхнюю a^* и нижнюю a_* цены. Проверьте наличие седловых точек $(\delta_{i_0}, \theta_{j_0})$. Если последняя существует, то укажите оптимальные стратегии игроков, при которых определена седловая точка. Здесь A -игры заданы своими матрицами потерь Первого игрока вида

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 20 & 6 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 1.1 & 1.2 \\ 1.3 & 1.4 & 1.5 & 1.6 \end{pmatrix}.$$

2.2 Используя определение седловой точки, проверьте наличие последней в простых A -играх, заданных своими матрицами потерь Первого игрока $A_4^T, A_5^T, A_6^T, A_9 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Указание. В задачах 3.1 и 3.2 действуйте по аналогии с рассмотренным примером 3 в § 3.

2.3 Первый игрок имеет \$1000 для приобретения путевки на курорт. Пусть по некоторым причинам покупка путевки переносится на месяц. В этой ситуации Первый игрок должен ответить на вопрос: “Как поступить с деньгами ?” Предположим, что курс доллара (Второй игрок) по отношению к рублю в момент принятия решения о покупке составляет 1:25. Через месяц возможны колебания курса доллара. Опишите игру как простую A -игру, составьте матрицу потерь Первого игрока, найдите цену игры, если она есть.

2.4 Предприятие выпускает два вида продукции: мороженое (цена продажи – 5 руб., себестоимость – 3 руб.) и пирожки (цена продажи – 4 руб., себестоимость – 2,5 руб.). В холодную погоду продается 1000 штук мороженого и 6000 штук пирожков; в теплую погоду – 4000 штук мороженого и 1200 штук пирожков. Если продукцию не успели продать в день изготовления, то на следующий день ее продают по цене, в четыре раза меньшей, чем в день изготовления. Сформулируйте задачу как простую A -игру, составьте матрицу выигрышей Предприятия, найдите цену игры, если она существует.

Указание. В данной задаче следует в качестве Первого игрока выбрать – Погоду, а в качестве Второго игрока – Предприятие, поскольку со Вторым игроком ассоциируется матрица выигрышей. У Погоды есть две стратегии

$$\delta_1 = \{\text{холодная погода}\} \text{ и } \delta_2 = \{\text{тёплая погода}\}.$$

У Предприятия также есть две стратегии

$$\theta_1 = \{\text{выпустить 1000 штук мороженого и 6000 штук пирожков}\}$$

и

$$\theta_2 = \{\text{выпустить 4000 штук мороженого и 1200 штук пирожков}\}.$$

Пояснение. Стратегии Предприятия определяют ассортимент и объём выпуска продукции.

Сформируем матрицу выигрышей Предприятия $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. У Предприятия есть затраты

(себестоимость) и доходы (например, продажа с надбавкой, выручка). Каждый элемент матрицы A есть выигрыш Предприятия в сложившейся игровой ситуации (δ_i, θ_j) , который вычисляется по правилу “Выручка минус Затраты”. Для того, чтобы вычислить элементы

матрицы A обозначим X_{ij} за выручку от реализации продукции, а Y_{ij} как затраты на производство. Определим $a_{ij} = a(\delta_i, \theta_j) = \{ \text{Выручка} - \text{Затраты} \} = X(\delta_i, \theta_j) - Y(\delta_i, \theta_j)$.

Тогда $a_{11} = a(\delta_1, \theta_1) = X(\delta_1, \theta_1) - Y(\delta_1, \theta_1)$. Вычислим

$Y(\delta_1, \theta_1) = 1000 \cdot 3 + 6000 \cdot 2,5 = 18000$ рублей и $X(\delta_1, \theta_1) = 1000 \cdot 5 + 6000 \cdot 4 = 29000$ рублей. Тогда $a_{11} = 29000 - 18000 = 11000$ рублей. По аналогии вычисляются элементы a_{12} , a_{21} и a_{22} . Дорешайте данную задачу согласно условию.

2.5 Решите задачу 2.4 для других числовых данных: мороженое (цена продажи – 1,2 руб., себестоимость – 0,8 руб.), пирожки (цена продажи – 0,8 руб., себестоимость – 0,5 руб.).

Задачи к § 3

3.1 Используя лемму 4 в § 3, составьте систему линейных уравнений и неравенств для $\tilde{a}$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ примера 1 в § 1.

3.2 Используя лемму 4 в § 3, составьте систему линейных уравнений и неравенств для $\tilde{a}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ в игре с A -матрицей потерь Первого игрока вида

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Найдите a^* , a_* и убедитесь, что в простой A -игре нет цены игры a .

3.3 Для матрицы потерь Первого игрока $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ решите задачу 3.2.

3.4 Молодой Бизнесмен планирует посетить Объединенные Арабские Эмираты и с этой целью собирается занять в Банке пять тысяч долларов США. Если дела Бизнесмена пойдут успешно (стратегия θ_1), он обещает через три месяца вернуть своему Банку взятые деньги плюс 10 процентов от суммы займа, т.е. \$5500. В противном случае (стратегия θ_2) Бизнесмен не сможет вернуть эти деньги.

У Банка также есть две стратегии

$\delta_1 = \{ \text{дать Бизнесмену деньги} \}$ и $\delta_2 = \{ \text{не дать Бизнесмену деньги} \}$.

Докажите, что минимаксной стратегией Банка является стратегия δ_2 , т.е. $\delta_m^* = \delta_2$.

Задачи к § 5

5.1 Даны матрицы потерь Первого игрока $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ и $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$. Найдите решение этих A -игр как игр формата (2×2) и сделайте проверку решений.

5.2 Дана матрица потерь Первого игрока $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. Найдите решение этой A -игры графическим способом и сделайте проверку решения.

5.3 Дана матрица потерь Первого игрока $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ -7 & 9 \\ -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите решение этой A -игры

графическим способом и сделайте проверку решения.

5.4 Для игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ убедитесь в том, что формулы леммы 5 пункта 5.1 в §

5 не дают правильного решения этой игры. Постарайтесь объяснить причину этого факта.

5.5 Первый игрок продает штучный товар Второму игроку. Он должен решить, какую цену назначить: высокую или низкую. Для покупателя (Второго игрока) в принципе приемлемы обе цены. Покупатель может сделать покупку либо в большом количестве, либо – в малом. Предположим, что матрица потерь Первого игрока имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сформулируйте задачу как A -игру формата (2×2) , найдите оптимальные стратегии обоих игроков, цену игры и сделайте проверку решения.

5.6 Обоснуйте следующую процедуру понижения размерности A -матрицы произвольной игры. Пусть дана матрица потерь Первого игрока $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ размерности $(n \times m)$, где $n \geq 2$. Пусть для некоторого индекса $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ найдется индекс $i' \in \{1, 2, \dots, n\}$ такой, что $i' \neq i$ и

$$a_{i'j} \leq a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Обозначим через A' матрицу размерности $(n-1) \times m$, которая получается из матрицы A удалением i -ой строки. Пусть $\tilde{a}'$, $\vec{x}'$ и $\vec{y}'$ определяют решение A' -игры. Тогда докажите, что $\tilde{a}$, $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяют решение A -игры, где $\tilde{a} = \tilde{a}'$, $\vec{y} = \vec{y}'$, а вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ получается из вектора $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ добавлением i -ой нулевой координаты.

5.7 Сформулируйте и обоснуйте процедуру понижения размерности A -матрицы игры с помощью удаления j -го столбца матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ потерь Первого игрока.

Задачи к § 6

6.1 Пусть в рассмотренном примере 9 в § 6 известны цена $\tilde{a} = \frac{17}{24}$ расширенной A -игры и оптимальная смешанная стратегия $\vec{x}^* = \left(\frac{4}{24}, \frac{11}{24}, \frac{9}{24} \right)$ Первого игрока. С помощью лемм 4 и 5 в § 3 найдите оптимальную смешанную стратегию $\vec{y}^* = (y_1, y_2, y_3)$ Второго игрока.

6.2 Найдите графическим методом решение A -игры, которая задана матрицей потерь $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Первого игрока. Сделайте проверку решения.

6.3 Найдите графическим методом решение A -игры, которая задана матрицей потерь $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ Первого игрока. Сделайте проверку решения.

6.4 Рассмотрим три линейные функции вида

$$f_j(x_1, x_2) = x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + a_{3j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где a_{ij} суть произвольные числа.

Пусть следующие три уравнения

$$f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2),$$

$$f_1(x_1, x_2) = f_3(x_1, x_2),$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_3(x_1, x_2)$$

определяют три различные прямые на плоскости. Докажите, что если любая пара этих прямых пересекается, то все три прямые пересекаются в одной точке.

Задачи к § 7

7.1. Составьте пару задач линейного программирования, эквивалентных играм в задачах 6.2 и 6.3.

7.2. Рассмотрите игру, в которой два противника A и B ведут борьбу за два стратегических пункта. Под командованием A находятся два полка, под командованием B – три полка. Обе стороны должны распределить свои силы между двумя пунктами. Пусть n_1 и n_2 – количество полков, посланных со стороны A на пункты 1 и 2 соответственно. Аналогично пусть m_1 и m_2 – количество полков, посланных B на пункты 1 и 2 соответственно. Выигрыш игрока B подсчитывается следующим образом. Если $m_1 > n_1$, то игрок B получает на первой позиции $2n_1 + 1$ очков, если $m_1 < n_1$, то игрок B теряет на первой позиции $2m_1 + 1$ очков. Аналогично осуществляется подсчет выигрыша игрока B на второй позиции. И наконец, если число полков на какой-нибудь позиции с каждой стороны одно и то же, то каждая сторона на этой позиции получает ноль очков. Сформулируйте задачу как расширенную A -игру и решите ее методом линейного программирования.

7.3. Рассмотрите следующую игру. Каждый игрок показывает один или два пальца и одновременно пытается угадать число пальцев, показанных противником. Если один из игроков угадал правильно, то он выигрывает сумму, равную общему числу пальцев, показанных обоими игроками. Во всех остальных случаях игра заканчивается вничью. Сформулируйте задачу как расширенную A -игру, составьте матрицу потерь Первого игрока. Решите задачу методом линейного программирования.

7.4. Рассмотрите игру с матрицей потерь Первого игрока вида

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

и решите её методом линейного программирования.

Задачи к § 8

8.1 Дана матрица потерь Первого игрока $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$. Дайте ответы на

следующие вопросы: **(а)** по сколько чистых стратегий у Первого и Второго игроков? **(б)** согласно критерию Лапласа, чему равны вероятности $\mathbf{P}\{\delta = \delta_i\} = \dots$ и $\mathbf{P}\{\theta = \theta_j\} = \dots$?

8.2 Дана матрица потерь Первого игрока $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 & 15 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 10 & 8 \\ -1 & 3 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$. Согласно

критерию Лапласа определите оптимальную (наилучшую) чистую стратегию этого игрока.

8.3 Рассматривается A -игра формата (3×3) с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ потерь

Первого игрока. Известно, что Первый игрок руководствуется критерием Лапласа и принимает решение согласно этому критерию. Составьте три различных варианта матрицы A в числах таким образом, чтобы для первой матрицы оптимальной чистой стратегией являлась стратегия δ_1 , во второй матрице – стратегия δ_2 и в третьей – стратегия δ_3 . Примечание: числа для составления матриц можно использовать произвольные.

8.4 Дана матрица потерь Первого игрока $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Измените элементы

матрицы произвольным образом так, чтобы для Первого игрока его чистые стратегии расположились по предпочтению следующим образом $\delta_1 \succ \delta_3 \succ \delta_2$, т.е. так, чтобы δ_1 была лучше δ_3 , а δ_3 была лучше δ_2 . Укажите какие элементы в исходной матрице Вы заменили и запишите новую матрицу после замены элементов.

8.5 Матрица потерь Первого игрока имеет вид $A = \begin{pmatrix} a & 2a & 1 \\ 4a & a-1 & a \\ b+a & b+1 & a-b \end{pmatrix}$. Известно, что

средние (ожидаемые) потери Первого игрока при выборе им своей чистой стратегии δ_1 такие же как и при выборе им чистой стратегии δ_2 , согласно критерию Лапласа. Также известно, что

средние потери Первого игрока согласно критерию Лапласа при выборе им своей чистой стратегии δ_3 равны 5. Определите числовые значения параметров a , b , запишите матрицу A при найденных a , b и сделайте проверку.

8.6 Дана матрица потерь Первого игрока вида $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 & -6 & 17 \\ 3 & 14 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 14 & 20 & -3 \\ 7 & 19 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$.

Найдите оптимальные чистые стратегии игроков по критериям принятия решения в условиях неопределённости: Лапласа, Сэвиджа, Гурвица, Ходжа-Лемана. В критерии Гурвица показатель оптимизма примите равным 0,5. В критерии Ходжа-Лемана показатель доверия к распределению вероятностей выберите равным 0,7 как для Первого, так и для Второго игрока, а вероятности использования игроками своих чистых стратегий примите равными $\vec{q} = (0,45; 0,35; 0,2)$ и $\vec{p} = (0,3; 0,5; 0,2)$. В критерии Сэвиджа рассмотрите матрицу A как: а) матрицу потерь Первого игрока, б) матрицу выигрышей Первого игрока.

8.7 Один из N станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, размер которой может принимать любое значение в пределах $Q_1 \leq Q \leq Q_2$. Производственные затраты для i -го станка задаются следующей функцией $c_i = k_i + a_i Q$, $i = 1, 2, \dots, N$. Найдите решение, используя все вышеописанные критерии в §8.

Задачи к § 9

9.1 Найдите оптимальную байесовскую стратегию δ_b^* в A -игре, если известно априорное распределение вероятностей $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ использования Вторым игроком

своих чистых стратегий. Матрица потерь Первого игрока имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Указание. Для получения решения задачи 9.1 и последующих задач к § 9 используйте метод Крамера, метод обратной матрицы или метод Гаусса решения систем неоднородных линейных алгебраических уравнений. Сделайте проверку решения.

9.2 Рассмотрите матрицу потерь Первого игрока задачи 9.1. Какое должно быть априорное распределение вероятностей $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ использования Вторым игроком своих чистых

стратегий, если байесовские потери, отвечающие этому распределению, имеют вид $\vec{l}^T = (0, 1, 1)$.

9.3 Рассмотрите матрицу потерь Первого игрока задачи 9.1. Какое должно быть априорное распределение вероятностей $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ использования Вторым игроком своих чистых стратегий, если байесовские потери, отвечающие этому распределению, имеют вид $\vec{l}^T = \left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$.

9.4 Матрица потерь Первого игрока имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Какое должно быть

априорное распределение вероятностей $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ использования Вторым игроком своих чистых стратегий, если байесовские потери, отвечающие этому распределению, имеют вид $\vec{l}^T = \left(\frac{6}{7}, \frac{-2}{7}, 1, 1\right)$.

9.5 Найдите оптимальную байесовскую стратегию δ_b^* Первого игрока в A -играх с

матрицами $A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ и $A_3 = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 & 7 \\ 8 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ в

предположении, что Второй игрок выбирает каждую свою последующую чистую стратегию с вероятностью: **(а)** вдвое большей, чем предыдущую; **(б)** втрое большей, чем предыдущую; **(с)** в 1,7 раза большей, чем предыдущую.

9.6 Пусть в условии задачи 4.4 к § 4 известны априорные вероятности $q_j = \mathbf{P}\{\theta = \theta_j\}$, $j = 1, 2$, т.е. вероятности использования Бизнесменом (Вторым игроком) своих чистых стратегий. Определите, при каких значениях q_2 оптимальной байесовской стратегией δ_b^* Банка (Первого игрока) будет стратегия δ_1 , т.е. как мала должна быть вероятность q_2 неудачи Бизнесмена, чтобы Банку было выгодно давать кредит для планируемого Бизнесменом инвестиционного мероприятия.

Задачи к § 10

10.1 Рассмотрите A -игру порядка (7×2) с матрицей потерь Первого игрока (мистера Нельсона)

$$A = \begin{pmatrix} 0,0 & 5,0 \\ 0,15 & 4,0 \\ 0,4 & 3,4 \\ 0,7 & 2,9 \\ 1,3 & 2,3 \\ 1,8 & 2,2 \\ 3,0 & 2,0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что именно такая A -игра получается, если удалить (при помощи доминирования) все стратегии, которые не являются допустимыми, т.е. $s \notin S^0$, $S^0 \subset D$. Найдите решение этой A -игры графическим методом.

10.2 Когда мистер Смит вернулся домой, миссис Смит сообщила ему, что из коробки с бисквитами пропала дюжина бисквитов. Бисквиты мог съесть сын Джон или соседские дети, которые приходили днем в гости и были оставлены одни, когда миссис Смит на 10 минут отлучилась (она ездила на почту, чтобы отправить многочисленные поздравления с Рождеством родственникам мужа). Мистер Смит считает, что если сын Джон виноват, то его следует наказать. Он составил следующую матрицу потерь (таблицу полезности)

	Действия супругов Смит	
Состояние Природы	$\delta_1 = \{\text{наказать}\}$	$\delta_2 = \{\text{не наказывать}\}$
$\theta_1 = \{\text{виновный}\}$	1	2
$\theta_2 = \{\text{невиновный}\}$	4	0

Супруги Смит решают взять за основу своих действий следующий эксперимент: они наблюдают за сыном во время ужина и замечают, как он ест – охотно (t_1), умеренно (t_2), плохо (t_3). Семейный врач предложил следующую оценку распределения вероятностей наблюдать исходы t_1 , t_2 и t_3 в виде таблицы

	Наблюдения за Джоном		
Состояние Природы	t_1	t_2	t_3
$\theta_1 = \{\text{виновный}\}$	0,1	0,4	0,5
$\theta_2 = \{\text{невиновный}\}$	0,2	0,6	0,2

Выполните следующее: **(а)** перечислите все чистые стратегии супругов Смит и найдите величину потерь для каждой из них, **(б)** изобразите стратегии в виде точек на плоскости, **(с)** изобразите на плоскости класс S' всех смешанных стратегий и найдите класс S^0 допустимых стратегий, **(д)** на основе допустимых стратегий класса S^0 сформулируйте расширенную A -

игру. Найдите решение этой расширенной A -игры графически, используя: **(а)** минимаксный подход, **(б)** байесовский подход при $q_1 = \frac{1}{3}$ и $q_2 = \frac{2}{3}$.

10.3 Пусть в примере 1 в § 1, роль Барометра играют итоги голосования в парламент страны, куда Бизнесмен планирует поехать. Возможны три исхода: $t_1 = \{\text{победила партия } D\}$, $t_2 = \{\text{победила партия } K\}$, $t_3 = \{\text{победила партия } L\}$. Бизнесмен считает приемлемой следующую таблицу для условных вероятностей $\mathbf{P}\{t = t_i / \theta = \theta_j\}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$

Состояние Природы	Итоги голосования		
	t_1	t_2	t_3
$\theta_1 = \{\text{поездка состоится в срок}\}$	0,9	0,1	0
$\theta_2 = \{\text{поездка перенесена}\}$	0,2	0,3	0,5

Выполните пункты **(а)-(д)**, рассмотренные в задаче 10.2.

10.4 Множество G на плоскости R^2 называется выпуклым, если для любых $x, y \in G$ отрезок $[x, y]$ лежит в G . Пусть заданы k точек $x_1, x_2, \dots, x_k \in R^2$. Докажите, что множество

$$G = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^k p_i x_i; p_i \geq 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1 \right\}$$

является выпуклым.

10.5 Найдите оптимальные минимаксную S_m^* и байесовскую S_b^* стратегии в статистической игре с матрицами

(а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ и **(б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Указание. Здесь матрица A есть матрица потерь Первого игрока. Матрица T содержит вероятности, с которыми Барометр принимает свои значения t_1 и t_2 , в зависимости от состояний θ_1 и θ_2 Природы.

Задачи к § 11

11.1 В течение 1994-1996 годов цена автобусного билета в городе Новосибирске и одного доллара США в рублях была соответственно

$$\overbrace{(4150, 220)}^{1994 \text{ год}}, \quad \overbrace{(4300, 300)}^{1995 \text{ год}}, \quad \overbrace{(5000, 350)}^{1996 \text{ год}}.$$

Найдите уравнение линейной регрессии, которое описывает зависимость цены автобусного билета от цены одного доллара США, выраженной в рублях. Постройте линию регрессии.

11.2 Для исследования зависимости объема производства (η) в тоннах от основных фондов (ξ) в млн. руб. получены данные по восьми предприятиям за год

$$(12, 210), (17, 220), (22, 230), (27, 240), (32, 250), (37, 260), (42, 270), (47, 280).$$

Найдите уравнение линейной регрессии η по ξ , отражающее зависимость объема производства от основных фондов. Постройте линию регрессии.

11.3 Ниже приведены данные по численности продавцов торгового центра (ξ) и накладным расходам (η) в млн. рублей

$$(225; 0,2), (375; 0,25), (525; 0,4), (675; 0,45), (825; 0,4), (975; 0,5).$$

Найдите уравнение линейной регрессии (η) по (ξ). Постройте линию регрессии.

11.4 Рассмотрим данные по совокупному доходу населения (ξ) в млн. руб. и величине прожиточного минимума (η) в период с 1992 по 1998 годы

$$(7,1; 1,9), (79,9; 20,6), (360,9; 86,6), (942,3; 264,1), \\ (1374,5; 369,4), (1643,3; 411,2), (1700,4; 493,3).$$

Найдите уравнения линейной регрессии η по ξ . Постройте линию регрессии.

Задачи к § 12

12.1 В производственном процессе партии товаров, имеющие 8%, 10%, 12% и 14% брака выпускаются с вероятностями 0,4; 0,3; 0,25 и 0,05 соответственно. Производитель связан контрактами с тремя потребителями. В них оговорено, что процент брака в партиях, направляемых потребителям А, В и С не должен превышать 8%, 12% и 14% соответственно. Если процент брака превышает обусловленный, то штраф составляет \$100 за 1% превышения. С другой стороны производство партии более высокого качества, чем требуемое, приводит к увеличению затрат производителя на \$50 за 1%. Кто из потребителей будет иметь наибольший приоритет при выполнении заказа, если партия не проверяется перед отправкой?

12.2 Спрос на некоторое изделие описывается следующей таблицей распределения

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,1

Определите уровень запасов, при котором вероятность полного истощения запасов не превышает 0,45. Определите также уровень запасов при условии, что среднее значение дефицита и превышения запаса не должны быть выше 1 и 2 единиц соответственно.

12.3 Автомат производит α тысяч единиц некоторого продукта ежедневно. Если α увеличивается, доля брака p возрастает. Плотность распределения случайной величины p дается следующей формулой $f_p(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Каждое бракованное изделие приносит убыток в \$50. Годное изделие дает прибыль в \$5.

Определите, при каком значении α ожидаемая прибыль принимает максимальное значение. Примените критерий комбинации ожидаемого значения и дисперсии. Сравните оптимальные решения для значения показателя несклонности к риску $k = 1, 2, 5$.

Задачи к § 13

13.1 Пусть Студент предполагает сдать зачет Преподавателю. Чтобы получить зачет Студент должен правильно ответить хотя бы на два вопроса из трех предложенных. Сформулируйте задачу как игру с ненулевой суммой, найдите решение игры.

13.2 На просмотр фильма в кинотеатре школьникам выдали билеты. Количество билетов ограничено. На два класса администрация выделила 60 билетов, но впереди будет контрольная по математике, и администрация решила учесть результаты планируемой контрольной. Если один из классов пишет без троек, то он получает 60 билетов. Если два класса не получают тройки, то каждый получит по 30 билетов. Если ни один из классов не пишет без троек, то они получают по 15 билетов. Сформулируйте задачу как игру с ненулевой суммой, найдите решение игры.

13.3 Пяти предпринимателям предложили проинвестировать проект, стоимость которого составляет \$1100. У предпринимателей имеются \$200, \$300, \$500, \$600 и \$800, соответственно. Проект отдадут тем предпринимателям, у которых будет необходимая сумма для его финансирования. Найдите вектор Шепли.

13.4 Инвесторы решают вопрос о направлении средств в те или иные отрасли экономики некоторой страны N . После дискуссий основная масса инвесторов решила из множества вариантов вложений выбрать три наиболее привлекательных и обсудить их отдельно. Одновременно с этим обсуждением правительство на своем заседании рассматривает несколько альтернативных стратегий развития экономики на ближайшие несколько лет. Инвесторы стоят перед выбором между инвестициями в нефтедобывающую, лесоперерабатывающую и автомобилестроительную отрасли. В одно и то же время с их закрытым совещанием проходит закрытое заседание правительства, на котором оно должно сделать выбор между преимущественным развитием нефтедобычи, железных дорог, электроэнергетики или жилищного комплекса. Сформулируйте задачу как игру с ненулевой суммой и составьте матрицу игры.

13.5 У торговой фирмы есть две грузовые машины, которые возвращаются из разных городов. Фирме требуется срочно отправить груз в город N . Если водители приедут точно по графику или раньше и отправятся в срочную командировку, то у каждого из них будет простой в два дня. Если оба водителя опоздают, то у них будет по одному дню простоя. Если один из

них приедет вовремя или раньше и отправится в город N , то у него не будет простоя, а у другого будет простой в пять дней. Сформулируйте задачу как игру с ненулевой суммой, найдите решение игры.

Задачи к § 14

14.1 Изменим условия примера 24 следующим образом. Имеется три вида спроса: высокий (с вероятностью 0,6), средний (с вероятностью 0,3) и низкий (с вероятностью 0,1). При переходе предприятия из состояния “3” в состояние “4” при высоком спросе ежегодный доход составляет \$300 тыс. Годовые доходы составляют:

- состояние “2” – высокий спрос в \$1 млн.,
 - средний спрос в \$400 тыс.,
 - низкий спрос в \$200 тыс.,
- состояние “5” – высокий спрос в \$900 тыс.,
 - средний спрос в \$400 тыс.,
 - низкий спрос в \$200 тыс.,
- состояние “6” – высокий спрос в \$300 тыс.,
 - средний спрос в \$250 тыс.,
 - низкий спрос в \$200 тыс.,
- состояние “3” – средний спрос в \$250 тыс.,
 - низкий спрос в \$200 тыс.

Составьте дерево решений и определите действия Фирмы.

14.2 Допустим, что в рамках задачи 14.1 вероятности высокого и низкого спроса неизвестны. Какова должна быть вероятность высокого спроса, чтобы Фирме было выгодно строить малое предприятие.

14.3 В рамках задачи 14.2 подберите вероятности низкого и среднего спроса так, чтобы Фирме было выгодно строить крупное предприятие.