

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.А.ДЖАФАРОВ

«МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ»

Учебник

Новосибирск, 2014 год

УДК

Д

Рецензенты:

канд.физ.-мат.наук, доцент кафедры высшей математики Новосибирского

государственного технического университета *А.П.Ковалевский*

канд.физ.-мат.наук, ученый секретарь института систем информатики

им.А.П.Ершова СО РАН *Ф.А.Мурзин*

Джафаров К.А.

Д Методы оптимальных решений: учебник / К.А.Джафаров. –
Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. - с.

ISBN

Настоящий учебник написан в соответствии с требованиями ФГОС к дисциплине «Методы оптимальных решений». Данный курс предназначен для студентов экономических специальностей. Здесь затронуты нижеперечисленные темы.

Методы оптимальных решений в задачах управления запасами. Модели управления запасами. Детерминированные модели управления запасами: статические и динамические, однопродуктовые и многопродуктовые. Вероятностные модели управления запасами. Саморегулирующиеся системы управления запасами.

Методы оптимальных решений в условиях неопределенности и риска. Критерии выбора решений в условиях неопределенности. Принятие решений на основе математического ожидания. Случайность и риск. Учет склонности к риску

Методы оптимальных решений в системах массового обслуживания. Основные характеристики моделей массового обслуживания (очередь, простой системы, поток клиентов). Системы массового обслуживания с пуассоновским распределением (с ожиданием, с отказами). Модели принятия решений со стоимостными характеристиками, предпочтительного уровня обслуживания.

УДК

©Джафаров К.А., 2014

©Новосибирский государственный
технический университет

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Глава 1. Методы оптимальных решений в задачах управления запасами

§1.1. Формирование и регулирование запасов

§1.2. Детерминированные модели

1.2.1. Классическая задача экономичного размера заказа

Задачи к 1.2.1

1.2.2. Задача экономичного размера заказа с разрывами цен

Задачи к 1.2.2

1.2.3. Многопродуктовая статическая модель с ограничением на емкость складских помещений

Задачи к 1.2.3

1.2.4. Однопродуктовая n – этапная динамическая модель

Задачи к 1.2.4

1.2.5. N –этапная модель календарного планирования производства

Задачи к 1.2.5

§1.3. Вероятностные модели

1.3.1. Модель с непрерывным контролем уровня запасов

Задачи к 1.3.1

1.3.2. Одноэтапные модели

Задачи к 1.3.2

§1.4. Саморегулирующиеся системы управления запасами

Глава 2. Методы оптимальных решений в условиях неопределенности и риска

§2.1. Методы принятия оптимальных решений в условиях неопределенности

Задачи к §2.1

§2.2. Методы принятия оптимальных решений в условиях риска

Задачи к §2.2

Глава 3. Методы оптимальных решений в системах массового обслуживания

§3.1. Некоторые сведения из Теории случайных процессов

§3.2. Введение в Теорию массового обслуживания

§3.3. Входной поток клиентов

Задачи к §3.3

§3.4. Процесс размножения и гибели

Задачи к §3.4

§3.5. Основные типы систем массового обслуживания

Задачи к §3.5

§3.6. Системы массового обслуживания с последовательными узлами (приборами) обслуживания

Задачи к §3.6

§3.7. Подготовка исходных данных и проверка гипотез

3.8. Принятие решений с использованием моделей массового обслуживания

Задачи к §3.8

Библиографический список

Предисловие

Учебный курс «Методы оптимальных решений» включен в ФГОС третьего поколения для студентов экономических специальностей. В предыдущие годы темы, включенные в данный курс читались в таких учебных курсах, как «Исследование операций», «Методы оптимизации», «Теория массового обслуживания», «Математические методы исследования в экономике», «Методы и модели в экономике». Автор имеет многолетний опыт прочтения вышеназванных курсов на различных факультетах НГТУ для студентов экономических специальностей. Темы настоящего курса были освещены в различных изданиях автора [8], [9], [10].

Разумеется, при написании данного курса автором использованы материалы предыдущих изданий. Стоит отметить, что многие примеры и задачи, включенные в данный учебный курс заимствованы из тех же изданий, а также из замечательной работы [1].

Автор выражает свою признательность рецензентам и всем тем, кто помог своими добрыми советами и критикой в написании настоящей книги.

Глава I. Методы оптимальных решений в задачах управления запасами

§ 1.1. Формирование и регулирование запасов

Задача управления запасами возникает в тех случаях, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени. Любая модель управления запасами должна дать ответ на два вопроса: какое количество продукции заказывать и когда это делать. Ответ на первый вопрос выражается через размер заказа, определяющего оптимальное количество ресурсов, которое необходимо доставлять каждый раз, когда происходит размещение заказа. Ответ на второй вопрос зависит от системы управления запасами.

В общем виде решение задачи управления запасами определяется так:

- в случае периодического контроля состояния запаса следует обеспечить поставку нового количества ресурсов в объеме размера заказа через равные интервалы времени;
- в случае непрерывного контроля состояния запаса необходимо размещать новый заказ, когда уровень запаса достигает точки возобновления заказа. Размер и точка возобновления заказа определяются из условий минимизации суммарных затрат (затраты на приобретение, затраты на оформление заказа, затраты на хранение и потери от дефицита).

Модели управления запасами бывают детерминированными и вероятностными.

§ 1.2. Детерминированные модели

Эти модели используются, когда характер спроса достоверно известен. Детерминированный спрос может быть

статическим (интенсивность спроса остается неизменной во времени) или динамическим (спрос изменяется во времени).

Рассмотрим три разновидности статических моделей управления запасами.

1.2.1. Классическая задача экономичного размера заказа

Однопродуктовая модель характеризуется постоянным спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита. Пусть y – размер заказа, и β - интенсивность спроса в единицу времени. Уровень запаса достигает нуля спустя $\frac{y}{\beta}$ единиц времени после получения заказа y . Чем меньше y , тем чаще нужно размещать новые заказы. При этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с повышением размера заказа уровень запаса увеличивается, но заказы размещаются реже. Так как затраты зависят от частоты размещения заказа и объема хранимого запаса, то y выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат: K – затратами на оформление заказа, и h – затратами на хранение единицы запаса в единицу времени. Обозначим через $TCU(y)$ – суммарные затраты в единицу времени, они определяются так:

$$TCU(y) = \frac{K\beta}{y} + y \frac{h}{2} .$$

Оптимальный размер заказа выбирается как значение y , минимизирующее эту функцию. Дифференцируем функцию $TCU(y)$ и приравниваем к нулю:

$$TCU'(y) = -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} = 0 .$$

Отсюда получим

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} .$$

Данная формула называется формулой Уилсона или формулой экономического размера заказа.

Подставляя полученное значение y^* в формулу суммарных затрат $TCU(y)$ получим:

$$TCU(y^*) = \sqrt{2K\beta h}.$$

Теперь можем сформулировать оптимальную стратегию модели: необходимо заказать y^* единиц продукции через каждые $t_0 = \frac{y^*}{\beta}$ единиц времени, и при этом оптимальные затраты составляют $\sqrt{2K\beta h}$ (в единицах затрат) в единицу времени.

В большинстве случаев существует срок выполнения заказа (от момента его размещения до реальной поставки, обозначим этот срок через L). Стратегия размещения заказов должна определять точку возобновления заказа. Точка возобновления заказа определяется, когда уровень запаса опускается до $L\beta$ единиц. В принципе срок выполнения заказа L меньше продолжительности цикла заказа t_0 , но это условие выполняется не всегда. Если условие не выполняется, то определяется эффективный срок выполнения заказа L_e в виде $L_e = L - n t_0$, где n – наибольшее целое, не превышающее L/t_0 . Оптимальная стратегия модели в этом случае предусматривает заказ y^* единиц продукции, как только уровень запаса опускается до $L_e\beta$ единиц.

Пример. 1.2.1. Неоновые лампы в университетском городке заменяются с интенсивностью 100 штук в день. Стоимость размещения заказа на покупку ламп составляет 100 долларов. Стоимость хранения лампы на складе оценивается в 0,02 доллара в день. Срок выполнения заказа от момента размещения до реальной поставки составляет 12 дней. Определим оптимальную стратегию заказа.

По условиям задачи мы имеем: $\beta = 100$ единиц в день, $K = 100$ долларов за заказ, $h = 0,02$ доллара за хранения одной лампы в день, $L = 12$ дней. Эти данные подставляем в формулу Уилсона и получаем $y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0,02}} = 1000$ ламп. Длина цикла составляет: $t_0 = \frac{y^*}{\beta} = 10$ дней. Поскольку, срок выполнения заказа $L = 12$ дней превышает продолжительность цикла t_0 необходимо вычислить L_e . Расчеты дают: $L_e = L - n t_0 = 12 - 1 \cdot 10 = 2$ дня. Поэтому точка возобновления заказа определяется при уровне запаса $L_e \beta = 2 \cdot 100 = 200$ ламп. Оптимальная стратегия выглядит так: необходимо заказать 1000 ламп, как только уровень запаса уменьшится до 200 ламп. Дневные расходы при этом составят: $TCU(y^*) = \sqrt{2K\beta h} = 20$ долларов.

Задачи к 1.2.1

1.2.1.1. В каждом из следующих случаев дефицит не допускается, а время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки составляет 30 дней. Определить оптимальную стратегию управления запасами и соответствующие дневные затраты (затраты в долларах).

А) $K = 100$, $h = 0,05$ в день, $\beta = 30$ единиц в день,

Б) $K = 50$, $h = 0,21$ в неделю, $\beta = 30$ единиц в день,

В) $K = 100$, $h = 0,01$ в день, $\beta = 70$ единиц в неделю,

Г) $K = 100$, $h = 0,14$ в неделю, $\beta = 28$ единиц в неделю.

1.2.1.2. Ресторан заказывает мясной фарш в начале каждой недели для удовлетворения недельного спроса в 300 фунтов (1 фунт = 0,45359237 кг). Фиксированная стоимость размещения заказа равна 20 долларам. Стоимость замораживания и хранения одного фунта фарша обходится ресторану примерно в 0,03 доллара в день.

А) Определить недельные затраты ресторана, связанные с существующей стратегией создания запаса.

Б) Определить оптимальную стратегию управления запасами, предполагая, что время выполнения заказа от момента размещения до реальной поставки равно нулю.

В) Вычислить разность между текущими недельными затратами ресторана и теми, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.

1.2.1.3. Отдел снабжения компании предложил две стратегии управления запасами.

Стратегия 1. Объем заказа 150 единиц при точке возобновления заказа в 50 единиц и времени выполнения заказа 10 дней.

Стратегия 2. Объем заказа 200 единиц при точке возобновления заказа в 75 единиц и времени выполнения заказа 15 дней.

Затраты на оформление заказа равны 20 долларам, а стоимость хранения единицы продукции на складе обходится в 0,02 доллара в день.

А) Какую из двух стратегий следует утвердить?

Б) Если бы Вы отвечали за разработку стратегии управления запасами, какова была бы ваша рекомендация?

1.2.2. Задача экономичного размера заказа с разрывами цен

Однопродуктовая модель с разрывами цен – модель с мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита. Пусть C_1 – цена единицы продукции при $y < q$, и C_2 при $y \geq q$, где q – размер заказа, при превышении которого предоставляется скидка. Суммарные затраты на единицу времени определяются так:

$$TCU_1(y) = \beta C_1 + \frac{K\beta}{y} + y \frac{h}{2}, \text{ при } y < q,$$

$$TCU_2(y) = \beta C_2 + \frac{K\beta}{y} + y \frac{h}{2}, \text{ при } y \geq q,$$

где $C_1 > C_2$. Определим y_m – размер заказа, при котором достигается минимум TCU_1 и TCU_2 :

$$y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}.$$

Оптимальный размер заказа y^* зависит от того, где находится точка разрыва цены q . Если $q < y_m$, то оптимальная стратегия модели предусматривает заказ в размере $y^* = y_m$ единиц. Если $q \geq y_m$, то находим точку q_1 из следующего уравнения:

$$TCU_2(q_1) = TCU_1(y_m).$$

Если $y_m \leq q < q_1$, то оптимальная стратегия модели предусматривает заказ в размере $y^* = q$ единиц, если же $q > q_1$, то оптимальная стратегия модели предусматривает заказ в размере $y^* = y_m$ единиц продукции.

Пример 1.2.2. Автомобильная мастерская специализируется на быстрой замене масла в автомобилях. Мастерская покупает автомобильное масло в большом количестве по 3 доллара за галлон (1 галлон=3,785412 литра). Цена может быть снижена до 2,50 долларов за галлон при условии, что мастерская покупает более 1000 галлонов. За день в мастерской обслуживается около 150 автомобилей, и на каждый из них для замены требуется 1,25 галлона масла. Мастерская хранит на складе большие объемы

масла, что обходится в 0,02 доллара в день за галлон. Стоимость размещения заказа на большой объем масла равна 20 долларам. Срок выполнения заказа составляет два дня. Определим оптимальную стратегию управления запасами.

По условиям задачи: $\beta = 150 \cdot 1,25 = 187,5$ галлона в день, $h = 0,02$ доллара за галлон в день, $K = 20$ долларов за заказ, $L = 2$ дня, $C_1 = 3$ доллара за галлон, $C_2 = 2,50$ доллара за галлон, $q = 1000$ галлонов. Сначала вычислим $y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 187,5}{0,02}} = 612,7$ галлонов. Так как $q = 1000$ и это значение больше y_m , переходим к следующему этапу, а именно, сначала вычислим $TCU_1(y_m)$:

$$TCU_1(y_m) = \beta C_1 + \frac{K\beta}{y_m} + y_m \frac{h}{2} = 574,75.$$

Далее, из уравнения $TCU_2(q_1) = TCU_1(y_m)$, или

$$\beta C_2 + \frac{K\beta}{q_1} + q_1 \frac{h}{2} = 574,75$$

находим q_1 . Подставляя значения из условия задачи находим $q_1 = 10564,5$. Отсюда, так как $y_m < q_1$, то оптимальная стратегия предусматривает заказ 1000 галлонов масла, когда уровень запаса понижается до $2\beta = 375$ галлонов.

Задачи к 1.2.2

1.2.2.1. Продукция используется с интенсивностью 30 единиц в день. Стоимость хранения единицы продукции равна 0,05 долларам в день, стоимость размещения заказа составляет 100 долларов. Предположим, что дефицит не допускается, стоимость закупки равна 10 долларам за единицу продукции, если объем закупки не превышает 500 единиц, и 8 долларам в противном случае. Определить оптимальную стратегию

управления запасами при условии, что срок выполнения заказа составляет 21 день.

1.2.2.2. Комплектующие продаются по 25 долларов за единицу, но предлагается 10% скидка при покупке партии от 150 единиц и выше. Компания в день использует 200 единиц комплектующих. Стоимость размещения заказа равна 50 долларам, стоимость хранения единицы товара составляет 0,30 доллара в день. Следует ли компании воспользоваться скидкой?

1.2.2.3. В предыдущей задаче определите пределы изменения скидки на цену комплектующих в процентах (предлагаемую за партию от 150 единиц и выше), при которых компания не получит никакой финансовой выгоды.

1.2.3. Многопродуктовая статическая модель с ограничением на емкость складских помещений

Эта модель предназначена для системы управления запасами, включающими n видов продукции. Введем обозначения (предполагая, что $i=1,2,...,n$):

A – максимально допустимая площадь помещения для всех n видов продукции,

a_i – площадь, необходимая для хранения единицы продукции i -того вида,

y_i – размер заказа на продукцию i -того вида,

β_i – интенсивность спроса на i -тую продукцию,

K_i – затраты на заказ i – той продукции,

h_i – затраты на хранение единицы i – той продукции в единицу времени.

Оптимальное значение y_i находим как решение следующей задачи. Найти значения y_i , $i=1,2,..., n$, минимизирующие следующую функцию:

$$TCU(y_1 \dots y_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i \beta_i}{y_i} + y_i \cdot \frac{h_i}{2} \right) \text{ при } \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A \\ y_i > 0, i = 1 \dots n \end{cases}.$$

Это - задача нелинейного программирования, и для ее решения применяется метод множителей Лагранжа. Составляется функция Лагранжа:

$$L(\lambda, y_1 \dots y_n) = TCU(y_1 \dots y_n) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i - A \right),$$

где λ - множитель Лагранжа, который принимает отрицательные значения. Дифференцируем функцию по каждой переменной и составляем систему

$$\begin{cases} L'_\lambda = 0 \\ L'_{y_i} = 0 \end{cases} \Rightarrow y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i - 2\lambda^* \cdot a_i}}, i = 1, \dots, n.$$

Оптимальное λ^* находится методом систематических проб и ошибок (последовательно уменьшая λ для вычисления соответствующих значений y_i^*).

Примечание. Для решения задачи сначала рекомендуется найти значения y_i , $i=1,2,\dots, n$, используя формулу Уилсона (при $\lambda = 0$). Если найденные значения удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A$, то эти значения и определяют оптимальное решение. Если же условие $\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A$ нарушается, то переходим к методу проб и ошибок.

Пример 1.2.3. Рассмотрим задачу управления запасами, исходные данные приведены в таблице.

Товар	K , в долл.	β , в ед.пр	h , в долл.	a , кв.м.
1	10	2	0,3	1
2	5	4	0,1	1

3	15	4	0,2	1
---	----	---	-----	---

Предположим, что $A = 25$ кв.м.

Сначала по формуле Уилсона для каждого вида товара находим y_i , $i=1,2,3$:

$$y_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 2}{0,3}} = 11,547, y_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{0,1}} = 20, y_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 4}{0,2}} = 24,495.$$

Далее проверяем, выполняется ли условие $\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A$:

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i = 1 \cdot 11,547 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 24,495 = 55,952, \quad \text{следовательно,}$$

условие $\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A$ не выполняется. Придавая λ отрицательные значения мы получим решение: $y_1^* = 6,34$ единицы, $y_2^* = 7,09$ единицы, $y_3^* = 11,57$ единицы (проверьте самостоятельно).

Расчеты можно производить также, используя шаблон Excel ch11ConstrainedEOQ.xls (см.[1]). Шаблон рассчитан на решение задач, содержащих не более 10 видов запаса.

Задачи к 1.2.3

1.2.3.1. Дана задача управления запасами для пяти видов продукции со следующей таблицей исходных данных (все затраты в долларах):

Товар	K	β	h	a , кв.м.
1	20	22	0,3	1
2	25	34	0,15	0,8
3	30	14	0,28	1,1
4	28	21	0,3	0,5
5	35	26	0,42	1,2

Определить оптимальный объем заказа при условии, что $A=75$.

1.2.3.2. Решите задачу из примера 1.2.3, предполагая, что сумма средних запасов всех товаров должна быть меньше 25 единиц.

1.2.3.3. Решить задачу из примера 1.2.3 предполагая, что единственным ограничением является денежная сумма в 10000 долларов, которая может быть потрачена на приобретение запасов продукции. Стоимости закупки единицы продукции вида 1,2 и 3 равны, соответственно 100, 50 и 100 долларам.

Далее рассмотрим два вида динамических моделей.

1.2.4. Однопродуктовая n – этапная динамическая модель

Предполагается, что хотя спрос достоверно известен, он может изменяться от этапа к этапу. Уровень запаса контролируется периодически. Пополнение запаса происходит мгновенно в начале этапа. Дефицит не допускается. Обозначим (предполагая, что $i=1,2,...,n$):

y_i – размер заказа для этапа i ,

β_i – интенсивность спроса на этапе i ,

x_i – исходный запас на начало этапа i ,

h_i – затраты на хранение единицы запаса в единицу времени, переходящие из этапа i в этап $i+1$,

K_i – затраты на оформление заказа для этапа i ,

$C_i(y_i)$ – функции производственных затрат (затраты на оформление и на приобретение) для этапа i задается так:

$$C_i(y_i) = \begin{cases} 0, & y_i = 0, \\ K_i + c_i(y_i), & y_i > 0. \end{cases}$$

где $c_i(y_i)$ – функция предельных производственных затрат (затраты на приобретение) при заданном y_i . Требуется найти оптимальные

значения Y_i^* , минимизирующие общие затраты по всем n этапам.

Затраты на хранение на этапе i равны $h_i \cdot x_{i+1}$, где $x_{i+1} = x_i + y_i - \beta_i$ – объем запаса, переходящего из этапа i в этап $i+1$ (Отметим, что $0 \leq x_{i+1} \leq \beta_{i+1} + \dots + \beta_n$). Обозначим через $f_i(x_{i+1})$ – минимальные общие затраты на этапах 1, 2, ..., i при заданной величине x_{i+1} на

конец этапа i . Данная задача решается как задача динамического программирования (здесь можно также использовать шаблон Excel ch11DynamicInventory.xls из [1]). Рекуррентное уравнение алгоритма записывается так:

$$f_1(x_2) = \min \{C_1(y_1) + h_1 x_2\}, 0 \leq y_1 \leq \beta_1 + x_2$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min \{C_i(y_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + \beta_i - y_i)\},$$

$$0 \leq y_i \leq \beta_i + x_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n.$$

Пример 1.2.4. Пусть исходный запас x_1 равен единице продукции, предельные затраты на приобретение продукции составляет 10 долларов за каждую единицу для первых трех единиц и 20 долларов – за каждую дополнительную единицу. Остальные данные представлены в таблице (все затраты в долларах):

Период	K	β	h
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Функция производственных затрат для периода i равна $C_i(y_i) = K_i + c_i(y_i)$ для $y_i > 0$, а именно

$$C_i(y_i) = \begin{cases} 10y_i, & 0 \leq y_i \leq 3, \\ 30 + 20(y_i - 3), & y_i \geq 4. \end{cases}$$

Эту задачу можно решить с помощью шаблона Excel ch11DynamicInventory.xls из [1]. Решение дает нам ответ: $y_1^* = 2, y_2^* = 3, y_3^* = 3$, при этом общие затраты составляют 99 долларов (проверьте самостоятельно).

Задачи к 1.2.4

1.2.4.1. Найдите оптимальное решение следующей четырехэтапной задачи управления запасами (все затраты в долларах).

Период	K	β	h
1	5	5	1
2	2	2	2
3	9	3	1
4	7	3	2

Затраты на приобретение первых шести единиц продукции составляют 1 доллар за каждую единицу и 2 доллара за каждую дополнительную единицу.

1.2.4.2. Пусть в задаче из примера 1.2.4 стоимость хранения запаса определяется средним его объемом на протяжении периода. Получите соответствующее рекуррентное уравнение и найдите оптимальное решение.

1.2.5. N – этапная модель календарного планирования производства

Спрос изменяется во времени. Для каждого этапа предполагаются нулевые затраты на оформление заказа. Дефицит допускается при условии, что весь задолженный спрос будет удовлетворен к концу этапа.

Обозначим (предполагая, что $i=1,2,\dots,N$):

C_i – производственные затраты на единицу продукции при обычном режиме работы на этапе i ,

d_i – производственные затраты на единицу продукции в сверхурочное время на этапе i ,

h_i – затраты на хранение единицы продукции в единицу времени, переходящие из этапа i в этап $i+1$,

p_i – потери от дефицита на единицу продукции, которая требуется на этапе i , но поставляется на этапе $i+1$,

aR_i – производственная мощность при обычном режиме работы на этапе i ,

aT_i – производственная мощность в сверхурочное время на этапе i .

Сначала рассмотрим *модель без дефицита*.

Представим модель как транспортную: имеется несколько исходных пунктов и несколько конечных пунктов (пункты назначения). В каждом исходном пункте имеется определенное количество продукции (предложение), а в каждом пункте назначения требуется определенное количество продукции (спрос). Известны транспортные расходы (стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения). Транспортная модель решает задачу нахождения оптимального плана перевозок всей продукции. В нашей модели исходными пунктами являются обычное и сверхурочное производство для различных этапов, а пунктами назначения – спрос на соответствующих этапах. Транспортные расходы – это сумма соответствующих производственных затрат и затрат на хранение единицы продукции. Эта задача решается с помощью автоматизированных программных средств.

Пример 1.2.5. Компания производит специальные вытяжки, которые используются в домашних каминах в период с декабря по март. В начале отопительного сезона спрос на эту продукцию низкий, в середине сезона он достигает своего пика и уменьшается к концу сезона. Учитывая популярность продукции, компания может использовать сверхурочные работы для удовлетворения спроса на свою продукцию. Следующая таблица содержит данные о производственных мощностях и объемах спроса на протяжении четырех месяцев.

	Возможности производства (единицы)	
--	------------------------------------	--

Месяц	Обычный режим работы	Сверхурочный режим работы	Спрос (единицы)
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

Стоимость производства единицы продукции равна 6 долларам в условиях обычного режима работы и 9 долларам при сверхурочных работах. Стоимость хранения единицы продукции на протяжении месяца равна 0,10 долларам.

Поскольку задача несбалансированная ($660 = 100 + 190 + 210 + 160 \neq 90 + 50 + 100 + 60 + 120 + 80 + 110 + 70 = 680$), то введя дополнительный столбец (фиктивный этап) с недостающими до равенства 20 (680-660) единицами продукции, получаем сбалансированную задачу. Для решения задачи составим таблицу (транспортную):

Этапы/ Режим	1	2	3	4	Ф	Предл .
R ₁	6	6,1	6,2	6,3	0	90
T ₁	9	9,1	9,2	9,3	0	50
R ₂		6	6,1	6,2	0	100
T ₂		9	9,1	9,2	0	60
R ₃			6	6,1	0	120
T ₃			9	9,1	0	80
R ₄				6	0	110
T ₄				9	0	70
Спрос	100	190	210	160	20	

Эту задачу решаем с помощью пакета ПЭР (проверьте самостоятельно). Получаем следующее оптимальное решение.

Период	Производство
Период 1 (обычный режим работы)	Изготовить 90 единиц продукции (е.п.) для периода 1.
Период 1 (сверхурочный режим работы)	Изготовить 40 е.п. для периода 1, 30 е.п.-для периода 2 и 10 – для периода

	3.
Период 2 (обычный режим работы)	Изготовить 100 е.п. для периода 2.
Период 2 (сверхурочный режим работы)	Изготовить 60 е.п. для периода 2.
Период 3 (обычный режим работы)	Изготовить 120 е.п. для периода 3.
Период 3 (сверхурочный режим работы)	Изготовить 80 е.п. для периода 3.
Период 4 (обычный режим работы)	Изготовить 110 е.п. для периода 4.
Период 4 (сверхурочный режим работы)	Изготовить 50 е.п. для периода 4, осталась неиспользованной производственная мощность на 20 е.п.

Соответствующие суммарные затраты при этом равны 4685 долларам.

В модели с дефицитом, предполагается, что задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу этапа N . В этом случае вышеуказанная таблица легко модифицируется введением соответствующих удельных транспортных издержек в заблокированные маршруты. Например, если p_i – удельные потери от дефицита на единицу продукции, которая требуется на этапе i , но поставляется на этапе $i+1$, то удельные транспортные расходы, соответствующие ячейкам $(R_i;1)$ и $(T_i;1)$ составляют $C_i + p_1 + p_2 + \dots + p_{i+1}$ и $d_i + p_1 + p_2 + \dots + p_{i+1}$, соответственно.

Задачи к 1.2.5

1.2.5.1. Решите задачу из примера 1.2.5, предполагая, что стоимости производства и хранения единицы продукции имеют значения, приведенные в таблице:

Периоды i	Стоимость единицы продукции (долл)		Стоимость хранения единицы до периода $i+1$
	Обычный режим	Сверхурочный режим	
1	5	7,5	0,1
2	3	4,5	0,15
3	4	6	0,12
4	1	1,5	0,2

1.2.5.2. Изделие производится для удовлетворения заданного спроса на четырех этапах в соответствии со следующими данными.

Диапазон объема производства	Удельные производственные затраты на этапах (долл.)			
	1	2	3	4
1-3	1	2	2	3
4-11	1	4	5	4
12-15	2	4	7	5
16-25	5	6	10	7
Затраты на хранение одного изделия до следующего этапа (долл)	0,3	0,35	0,2	0,25
Суммарный спрос (ед.прод)	11	4	17	29

А) Найдите оптимальное решение, определяющее количество изделий, которые необходимо изготовить на каждом из четырех этапов.

Б) Предположим, что на этапе 4 требуется 10 дополнительных изделий. На каких этапах следует их изготовить?

§1.3. Вероятностные модели

Вероятностный спрос может быть нестационарным, когда распределение вероятностей спроса неизменно во времени, и стационарным, когда распределение изменяется во времени. Здесь основным критерием принятия решений является минимум ожидаемых затрат или максимум ожидаемой прибыли.

1.3.1. Модель с непрерывным контролем уровня запаса

Это модель, в которой уровень запаса контролируется непрерывно, заказ размером u размещается тогда, когда этот уровень достигает некоторой точки возобновления заказа R . При этом требуется найти оптимальные значения u и R , минимизирующие суммарные удельные (на единицу продукции за единицу времени) ожидаемые затраты. Данная модель предусматривает следующие допущения:

- срок выполнения заказа носит случайный характер,
- неудовлетворенный в течение срока выполнения заказа спрос накапливается,
- распределение вероятностей спроса не зависит от момента его возникновения,
- в любой момент времени имеется не более одного невыполненного заказа.

Введем обозначения:

$p_{\xi}(t)$ – плотность распределения вероятностей спроса ξ в течение срока выполнения заказа,

β – ожидаемое значение спроса в единицу времени,

h – удельные затраты на хранение,

p – удельные потери от дефицита,

K – затраты на оформление заказа.

Суммарные годовые затраты включают средние затраты на оформление заказа, ожидаемые затраты на хранение и ожидаемые потери от дефицита. Так как $\frac{\beta}{u}$ – среднее число заказов в год, то

$\frac{K\beta}{y}$ – годовые затраты на оформление заказа. Поскольку ожидаемые затраты на хранение зависят от уровня товарного запаса на начало и на конец цикла, то $E(R-\xi)$ – ожидаемый уровень запаса в конце цикла и $y+E(R-\xi)$ – ожидаемый уровень запаса в начале цикла. Тогда средний уровень запаса определяется так:

$$EH = E(R - \xi) + \frac{y}{2},$$

где $E(R - \xi) = \int_0^{\infty} (R - t) p_{\xi}(t) dt = R - E\xi$.

При $\xi > R$ возникает дефицит, обозначим через S – размер дефицита за единицу времени, тогда

$$S = \begin{cases} \xi - R, & \xi > R, \\ 0, & \text{если } \xi \leq R. \end{cases}$$

Так как в течение года размещается $\frac{\beta}{y}$ заказов, то ожидаемый размер дефицита определяется так:

$$\frac{\beta}{y} \cdot ES, \text{ где } ES = \int_R^{\infty} (t - R) p_{\xi}(t) dt.$$

Исходя из вышесказанного суммарные годовые затраты равны:

$$TCU(y, R) = \frac{\beta}{y} \cdot K + h \cdot \left(\frac{y}{2} + R - E\xi \right) + p \cdot \frac{\beta}{y} \cdot ES.$$

Дифференцируем эту функцию по y и R , приравниваем к нулю, решаем систему и получаем:

$$\begin{cases} TCU'(y) = 0 \\ TCU'(R) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} - p \cdot \frac{\beta}{y^2} \cdot ES = 0 \\ h - \frac{p\beta}{y} \cdot \int_R^{\infty} p_{\xi}(t) dt = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^* = \sqrt{\frac{2\beta(K + pES)}{h}} \\ \int_R^{\infty} p_{\xi}(t) dt = \frac{hy^*}{p\beta} \end{cases}.$$

Алгоритм нахождения решения (предложен Хедли и Уайтин) следующий. Прежде проверяем, существует ли допустимое решение. При $R = 0$ записываем последние два уравнения:

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{2\beta(K + pE\xi)}{h}}, \quad \tilde{y} = \frac{p\beta}{h}. \text{ Если } \tilde{y} > \bar{y}, \text{ тогда существуют}$$

единственные оптимальные значения для y и R . Легко видеть, что наименьшим значением y^* является $\sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$, которое достигается при $ES = 0$. Приведем этапы алгоритма.

Находим R_1 , подставляя y_1 в уравнение:

$$y_1 = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}, \quad \int_{R_1}^{\infty} p_{\xi}(t)dt = \frac{hy_1}{p\beta}.$$

Далее, подставляя R_1 находим y_2 :

$$ES = \int_{R_1}^{\infty} (t - R_1) p_{\xi}(t)dt, \quad y_2 = \sqrt{\frac{2\beta(K + pES)}{h}}.$$

Подставляя y_2 в уравнение $\int_{R_2}^{\infty} p_{\xi}(t)dt = \frac{hy_2}{p\beta}$, находим R_2 .

Процедура продолжается до тех пор, пока два последовательных значения R не станут приблизительно равными. Последние найденные y и R будут оптимальными значениями.

Пример 1.3.1. Электротехническая компания использует в производственном процессе канифоль в количестве 1000 галлонов в месяц. Размещение заказа на новую поставку канифоли обходится фирме в 100 долларов. Стоимость хранения одного галлона канифоли на протяжении одного месяца равна 2 долларам, а удельные потери от ее дефицита – 10 долларам за один галлон. Статистические данные свидетельствуют о том, что спрос в период поставки является случайной величиной, равномерно распределенной от 0 до 100 галлонов. Определим оптимальную политику управления запасами для компании.

Из условий задачи получается, что $\beta = 1000$ галлонов в месяц, $K = 100$ долларов за размещение заказа, $h = 2$ доллара за один галлон в месяц, $p = 10$ долларов за один галлон, $p_{\xi}(t) = 0,01$, если $0 \leq t \leq 100$, $E\xi = 50$ галлонов. Проверим, существует ли допустимое решение задачи. Найдем: $\bar{y} = \sqrt{\frac{2\beta(K + pE\xi)}{h}} = 774,6$ галлонов, и

$\tilde{y} = \frac{p\beta}{h} = 5000$ галлонов. Так как $\tilde{y} \geq \bar{y}$, значит, существует

единственное решение для y и R . Записываем выражение для ES :

$$ES = \int_R^{\infty} (t - R) \cdot 0,01 dt = \frac{R^2}{200} - R + 50. \quad \text{Далее, находим}$$

$$y_i = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot (100 + 10 \cdot ES)}{2}} = \sqrt{10000 + 10000 \cdot ES} \quad \text{галлонов,}$$

$$\int_{R_1}^{\infty} 0,01 dx = \frac{2y_i}{10 \cdot 100}. \quad \text{Отсюда: } R_i = 100 - \frac{y_i}{50}.$$

Теперь, последовательно получаем:

$$\text{Шаг 1 } y_1 = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 100}{2}} = 316,23 \quad \text{галлонов,}$$

$$R_1 = 100 - \frac{y_1}{50} = 93,68 \quad \text{галлонов.}$$

$$\text{Шаг 2. } ES = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = 0,1997 \quad \text{галлонов, } y_2 = 319,37 \quad \text{галлонов.}$$

$$\text{Находим } R_2 = 100 - \frac{y_2}{50} = 93,6126 \quad \text{галлонов.}$$

$$\text{Шаг 3. } ES = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = 0,20399 \quad \text{галлонов, } y_3 = 319,44 \quad \text{галлонов.}$$

$$\text{Определим } R_3 = 100 - \frac{y_3}{50} = 93,611 \quad \text{галлонов. Поскольку значения}$$

R_2 и R_3 примерно одинаковы, приближенное оптимальное решение определяется так: $R^* \approx 93,61$ галлонов, $y^* \approx 319,4$ галлонов.

Следовательно, оптимальное управление запасами состоит в размещении заказа примерно на 320 галлонов, как только запас уменьшается до 94 галлонов.

Эту задачу можно решить также с помощью шаблона Excel (он рассчитан только на равномерное распределение спроса) ch16ContinuosReviwModel.xls из [1].

Задачи к 1.3.1

1.3.1.1. Для примера 1.3.1 определите: а) приближенное число заказов в месяц, б) ожидаемое значение месячной стоимости размещения заказов, в) ожидаемое значение месячных затрат на хранение, г) ожидаемое значение месячных затрат, связанных с дефицитом, д) вероятность истощения запаса в течение периода выполнения заказа.

1.3.1.2. Решить задачу из примера 1.3.1 учитывая, что спрос является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[0,50]$.

1.3.1.3. Найдите оптимальное решение задачи из примера 1.3.1, если спрос является нормально распределенной случайной величиной со средним 100 галлонов и стандартным отклонением 2 галлона. Предположите также, что $\beta = 10000$ галлонов в месяц, $K = 20$ долларов за размещение заказа, $h = 2$ доллара за один галлон в месяц, $p = 4$ доллара за один галлон.

1.3.2. Одноэтапные модели

В этих моделях пополнение запаса осуществляется мгновенно и заказ размещается один раз. Оптимальный уровень запаса определяется исходя из минимизации ожидаемых затрат, которые включают затраты на размещение заказа (затраты на оформление плюс затраты на закупку или производство), затраты на хранение и потери от дефицита.

Мгновенный спрос при отсутствии затрат на оформление заказа.

Предположим, что суммарный спрос удовлетворяется в начале этапа. Обозначим:

$$H(y) = \begin{cases} y - \xi, & y > \xi, \\ 0, & \text{если } y \leq \xi \end{cases} \quad \text{- уровень запаса,}$$

$$S(y) = \begin{cases} \xi - y, & \xi > y, \\ 0, & \text{если } \xi \leq y \end{cases} \quad \text{- уровень дефицита,}$$

x – уровень запаса до момента размещения заказа,

$p_\xi(t)$ – плотность распределения вероятностей спроса ξ ,

h – удельные издержки на хранение,

p – удельные потери от дефицита,

C – удельные затраты на закупку,

y – размер заказа.

Тогда ожидаемые удельные затраты составляют:

$$\begin{aligned} ETCU(y) &= C(y - x) + h \cdot \int_0^\infty H(y) p_\xi(t) dt + p \cdot \int_0^\infty S(y) p_\xi(t) dt = \\ &= C(y - x) + h \cdot \int_0^y (y - t) p_\xi(t) dt + p \cdot \int_y^\infty (t - y) p_\xi(t) dt. \end{aligned}$$

Далее, дифференцируем эту функцию и приравняем к нулю:

$$ETCU'(y) = C + h \cdot \int_0^y p_\xi(t) dt - p \cdot \int_y^\infty p_\xi(t) dt = 0.$$

Из последнего уравнения получим (при $p > C$):

$$\int_0^{y^*} p_\xi(t) dt = \frac{p - C}{p + h} \quad (1).$$

Отсюда найдем y^* . Оптимальная стратегия при заданном x выглядит так: *если $y^* > x$, то размер заказа равен $(y^* - x)$ единицам продукции, если же $y^* \leq x$, то ничего не следует заказывать.*

Примечание. Если распределение вероятностей спроса ξ дискретное, то уравнение (1) записывается так:

$$P(\xi < y^*) = \frac{p - C}{p + h}.$$

Пример 1.3.2. Владелец газетного киоска должен определить количество экземпляров газеты А (условное название), которые должны быть в продаже в начале каждого дня. Он покупает экземпляр газеты за 30 центов, а продает за 75 центов. Продажа газеты обычно происходит с 7 до 8 часов утра.

Оставшиеся к концу дня экземпляры повторно выставляются для продажи по цене 5 центов за экземпляр. Сколько экземпляров газеты должен закупить владелец киоска каждое утро, если дневной спрос описывается одним из следующих распределений:

1. нормальным распределением с математическим ожиданием 300 экземпляров и стандартным отклонением 20 экземпляров,
2. дискретным законом распределения со следующей таблицей:

ξ	200	220	300	320	340
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Стоимости хранения и потери, обусловленные дефицитом, в этой ситуации не определены в явном виде. Однако данные свидетельствуют о том, что каждый непроданный экземпляр газеты обходится владельцу в $30 - 5 = 25$ центов, и что потери, связанные с истощением запаса газет, равны $75 - 30 = 45$ центов за экземпляр. Следовательно, в терминах, принятых в модели управления запасами, мы можем предполагать, что $C = 30$ центов за экземпляр, $h = 25$ центов за экземпляр и $p = 45$ центов за экземпляр в день.

Сначала определяем критическое отношение:

$$\frac{p - C}{p + h} = \frac{45 - 30}{45 + 25} \approx 0,214.$$

1. В случае нормального распределения определим случайную величину, $z = \frac{\xi - 300}{20}$, которая имеет стандартное нормальное распределение. Из таблица значений функции стандартного нормального распределения находим $P(z < -0,79) \approx 0,214$. Тогда из уравнения $\frac{y^* - 300}{20} = -0,79$ находим y^* . Следовательно, оптимальный объем заказа равен $y^* = 284,2$ (285) экземпляра.
2. В случае дискретного распределения для критического отношения 0,214 имеем неравенства:

$$P(\xi \leq 200) \leq 0,214 \leq P(\xi \leq 220).$$

Отсюда получаем, что $y^* = 220$ экземпляров.

Мгновенный спрос при наличии затрат на оформление заказа.

Так как K – затраты на оформление заказа, то ожидаемые суммарные затраты равны:

$$ETCU_1(y) = K + ETCU(y).$$

Дифференцируя эту функцию получаем: $ETCU'_1(y) = ETCU'(y)$.

Алгоритм нахождения решения следующий. Из условия

$P(y \leq y^*) = \frac{p-C}{p+h}$ находим y^* (обозначим через S_m). Далее, из

уравнения $ETCU_1(S_0) = K + ETCU(y^*)$ находим S_0 . Оптимальная

стратегия задачи управления запасами следующая: если $x < S_0$, то

размер заказа составляет $(S_0 - x)$ единиц продукции, если

$S_0 \leq x \leq S_m$, то размер заказа составляет x единиц продукции,

если же $x \geq S_m$, то ничего не следует заказывать.

Задачи к 1.3.2

1.3.2.1. В одноэтапной модели управления запасами стоимость закупки единицы продукции равна 10 долларам, а стоимость ее хранения – 1 доллару. Найдите допустимую область значений удельных потерь от неудовлетворенного спроса в оптимальном случае, если объем заказа равен 4 единицам. Также предполагается, что спрос удовлетворяется мгновенно в начале периода, и что таблица распределения выглядит так:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,1	0,1	0,2	0,25	0,15	0,05

1.3.2.2. Магазин быстрого обслуживания предлагает посетителям кофе и орехи с шести часов утра. Магазин покупает орехи по 7 центов за порцию, а продает по 25 центов за порцию до 8 часов утра. После этого времени орехи продаются по 5 центов за

порцию. Число посетителей, которые ежедневно покупают орехи, является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[30,50]$. Каждый посетитель обычно заказывает три порции орехов с кофе. Сколько примерно порций ореха следует закупать магазину каждое утро в целях максимизации своих доходов?

1.3.2.3. Магазин одежды создает запас теплых пальто для приближающейся зимы. Каждое пальто закупают по 50 долларов, а продают со 100%-ной наценкой. В конце сезона проводится распродажа, и пальто реализуется по цене 55 долларов. Спрос на пальто в течение зимнего сезона является равномерно распределенной на отрезке $[20,30]$ случайной величиной. Затраты на хранение в расчет не принимаются (короткий зимний сезон, например). Управляющий магазином считает также, что не будет потерь, вызванных дефицитом товара. Определите оптимальный объем заказа, который максимизирует доходы магазина.

§1.4. Саморегулирующиеся системы управления запасами

Рассматриваемые выше модели управления запасами предполагают относительную неизменность условий, но на практике обычно бывают следующие случаи:

- изменение потребности в запасе,
- изменения в условиях поставки,
- нарушения контракта поставщиком.

Для регулирования таких ситуаций создаются комбинированные системы с возможностью саморегулирования. Каждой такой системе установлена определенная целевая функция, служащая критерием оптимальности в рамках данной модели управления запасами. Целевая функция содержит три элемента:

- затраты, связанные с организацией заказа и его реализацией, оплата всех услуг по доставке товара на склад,
- затраты на хранение (постоянные и переменные издержки, потери от порчи и т.д.),
- потери от дефицита.

В качестве примера рассмотрим следующую модель управления запасами.

АВС – метод регулирования запасов

Здесь определение сроков и регулирование закупок сводится к расчетам по какой – либо формуле. Нерационально уделять материалам, играющим незначительную роль в производстве то же внимание, что и материалам первостепенной важности (принцип Парето). В зависимости от затрат материалы делятся на три класса:

А – немногочисленные, но важные материалы, требующие больших вложений,

В – относительно второстепенные материалы, требующие меньшего внимания,

С – материалы, составляющие значительную часть, недорогие, требующие наименьших вложений.

Перечислим этапы АВС – метода:

- установить стоимость каждого материала,
- установить спрос на каждый материал,
- расположить материалы по убыванию стоимости,
- суммировать данные о количестве и издержках на материалы,
- разбить материалы на группы в зависимости от удельного веса в общих издержках.

Этот метод позволяет провести классификацию материалов и использовать ее долгое время. Однако, из-за изменения спроса и стоимости возможна переклассификация.

Глава 2. Методы оптимальных решений в условиях неопределенности и риска

§2.1. Методы принятия оптимальных решений в условиях неопределенности

Как известно, в играх двух участников (см. Теорию Игр) когда у игрока нет информации о поведении другого игрока, для поиска оптимальной стратегии принято использовать минимаксный подход (критерий *Вальда*). А когда у игрока имеется достаточно информации, которая выражается через распределение вероятностей выбора другим игроком своих чистых стратегий, принято использовать байесовский подход (критерий *Байеса*). Однако, в этих двух подходах не учитывается отношение игрока (неопределенность) к ситуации, что может выражаться через его неоднозначное согласие с выводами, которые рекомендуются указанными подходами. Тем не менее, в данной ситуации требуется принимать решение, получить которое помогают, например, следующие критерии: *Лапласа, Сэвиджа, Гурвица, Ходжа-Лемана*.

Ниже мы рассмотрим подробно указанные критерии принятия решения Первым игроком. Для Второго игрока данные критерии применяются аналогично.

Критерий Лапласа

В основе этого критерия лежит так называемый принцип *недостаточного обоснования*, согласно которому точно неизвестно, с какими вероятностями игроки выбирают свои чистые стратегии в игре друг с другом.

Рассмотрим матрицу потерь Первого игрока, которая одновременно является матрицей выигрышей Второго игрока

$$A = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_m \\ \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad .$$

Предположим, что Второй игрок свои чистые стратегии $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ применяет (выбирает) с вероятностями $q_1, q_2, \dots, q_m$, соответственно. Первый игрок не знает в точности значения вероятностей $q_1, q_2, \dots, q_m$ выбора Вторым игроком своих чистых стратегий, поэтому полагает, что возможные стратегии Второго игрока будут реализовываться с *равными* вероятностями, т.е. $P(\theta = \theta_j) = q_j = \frac{1}{m}, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Правило определения *оптимальной чистой стратегии* $\delta^* \in \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ Первого игрока по критерию Лапласа имеет вид

$$\delta^* : a(\delta^*) = \min_{\delta_i} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a(\delta_i, \theta_j) \right\}, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Пример 2.1.1. Пусть матрица потерь Первого игрока выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 17 & 19 & 20 \\ 35 & 40 & 30 & 27 & 25 \\ 70 & 80 & 50 & 45 & 49 \\ 30 & 15 & 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}_{4 \times 5} . \quad \text{Найдем оптимальную}$$

стратегию Первого игрока по критерию Лапласа.

Вычислим по матрице ожидаемые потери Первого игрока:

$$a(\delta_1) = \frac{1}{5}(10 + 15 + 17 + 19 + 20) = 16,2,$$

$$a(\delta_2) = \frac{1}{5}(35 + 40 + 30 + 27 + 25) = 31,4,$$

$$a(\delta_3) = \frac{1}{5}(70 + 80 + 50 + 45 + 49) = 58,8,$$

$$a(\delta_4) = \frac{1}{5}(30 + 15 + 10 + 7 + 11) = 14,6.$$

Очевидно, что оптимальная чистая стратегия Первого игрока, согласно критерию Лапласа, есть стратегия $\delta_{\text{Лаплас}}^* = \delta_4$, поскольку ожидаемые потери для этой стратегии минимальны.

Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм *минимаксного* (*максиминного*) критерия путем замены матрицы платежей A , которая может рассматриваться либо как матрица *потерь*, либо как матрица *выигрышей*, на матрицу *сожалений* R . Под “сожалением” здесь понимаются мысли Первого игрока, по поводу того, что он не выбрал своей *наилучшей* стратегии, которую бы давал ему критерий *минимакса* (*максимина*), применительно к исходной матрице A .

Пусть изначально матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ есть матрица потерь Первого игрока (или же его матрица выигрышей), т.е.

$$A = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_m \\ \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{matrix}_{n \times m},$$

Матрица *сожалений* $R = (r_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ определяется следующим образом

$$r_{ij} = \begin{cases} \max_{\delta_k} \{a_{kj}\} - a_{ij}, & \text{если } A - \text{матрица выигрышей} \\ a_{ij} - \min_{\delta_k} \{a_{kj}\}, & \text{если } A - \text{матрица потерь} \end{cases}, \quad (*)$$

где $\delta_k \in \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$.

После составления матрицы R по правилу $(*)$ к ней применяется *минимаксный* подход для определения *оптимальной чистой стратегии* $\delta^* \in \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ Первого игрока.

Пример 2.1.2. Пусть матрица потерь Первого игрока имеет вид $A = \begin{pmatrix} 11000 & 90 \\ 10000 & 10000 \end{pmatrix}$, где потери измеряются в условных единицах.

Требуется определить оптимальную чистую стратегию Первого игрока по критерию Сэвиджа.

Найдём верхнюю цены простой A -игры $a^* = 10000$. По критерию Вальда δ_2 есть приемлемая *минимаксная стратегия* Первого игрока, т.е. Первый игрок должен быть готов потерять как минимум 10000 единиц.

Получим матрицу *сожалений* $R = (r_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ по правилу $(*)$.

Тогда получаем

$$R = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 9910 \end{pmatrix}.$$

Теперь верхняя цена игры $a^* = 1000$, следовательно, δ_1 есть *оптимальная чистая стратегия* Первого игрока по критерию Сэвиджа, $\delta_{\text{Сэвидж}}^* = \delta_1$.

Отметим еще раз, что независимо от того является ли A -матрица игры матрицей потерь или матрицей выигрышей, матрица R рассматривается как матрица потерь и для нахождения решения игры к матрице R применяется *минимаксный* подход.

Критерий Гурвица

Этот критерий учитывает *склонность* лица принимающего решение к *оптимизму* или *пессимизму*.

Предположим, что $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ есть матрица потерь Первого игрока. Очевидно, что для Первого игрока *оптимистический выбор* своей чистой стратегии осуществляется по правилу вида

$$\min_{\delta_i} \min_{\theta_j} \{a_{ij}\},$$

а *пессимистический выбор* – по правилу

$$\min_{\delta_i} \max_{\theta_j} \{a_{ij}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Введём в рассмотрение параметр α и составим следующую функцию потерь вида

$$\min_{\delta_i} \left\{ \alpha \min_{\theta_j} (a_{ij}) + (1 - \alpha) \max_{\theta_j} (a_{ij}) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $\alpha \in [0, 1]$ есть *показатель оптимизма*. Далее, по значению функции потерь выбирается *оптимальная чистая стратегия* Первого игрока. Если $\alpha = 0$, то критерий Гурвица становится *консервативным*, так как его применение эквивалентно применению обычного *минимаксного* критерия. Если $\alpha = 1$, то критерий Гурвица становится слишком *оптимистичным*, ибо рассчитывает на наилучшее из наилучших условий. Если точное значения параметра α неизвестно, то оно выбирается равным $1/2$.

Пример 2.1.3. Пусть матрица потерь Первого игрока имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 8 & 23 \\ 21 & 12 & 12 & 21 \\ 30 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить оптимальную стратегию Первого игрока по критерию Гурвица.

Для применения критерия Гурвица составим вспомогательную таблицу (см. таблицу 1), выбирая показатель оптимизма равным $\alpha = 1/2$.

δ_i	$\min_{\theta_j} \{a_{ij}\}$	$\max_{\theta_j} \{a_{ij}\}$	$\min_{\delta_i} \left\{ \alpha \min_{\theta_j} (a_{ij}) + (1-\alpha) \max_{\theta_j} (a_{ij}) \right\}$
δ_1	5	25	15
δ_2	7	23	15
δ_3	12	21	16,5
δ_4	15	30	22,5

Согласно расчётам, представленным в таблице 1, оптимальными чистыми стратегиями Первого игрока являются одновременно δ_1 и δ_2 , т.к. функция потерь минимальна для этих стратегий. Стало быть множество оптимальных чистых стратегий Первого игрока по критерию Гурвица содержит два элемента $\Delta_{Гурвиц}^* = \{\delta_1, \delta_2\}$.

Если же А-матрица игры есть матрица выигрышей Первого игрока, тогда значение критерия Гурвица определяется по формуле

$$\max_{\delta_i} \left\{ \alpha \max_{\theta_j} (a_{ij}) + (1-\alpha) \min_{\theta_j} (a_{ij}) \right\}$$

и дает оптимальную чистую стратегию δ^* Первого игрока.

Критерий Ходжа-Лемана

Чтобы продемонстрировать этот критерий в работе, обозначим через β – показатель доверия к распределению вероятностей использования Вторым игроком своих чистых стратегий. При $\beta = 0$ полагается полное (абсолютное) недоверие к распределению вероятностей, а при $\beta = 1$ – полное доверие к этому распределению.

Оптимальная чистая стратегия Первого игрока, согласно критерию Ходжа-Лемана, определяется соответственно в виде

$$\delta_{ХоджаЛемана}^* : a(\delta^*) = \min_{\delta_i \in \Delta} \left\{ \beta \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j + (1-\beta) \max_{\theta_j} a_{ij} \right\},$$

где числа q_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ суть вероятности использования Вторым игроком своих чистых стратегий $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

Пример 2.1.4. Пусть у нас, согласно некоторой игровой ситуации, получена матрица потерь Первого игрока

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Требуется определить оптимальные чистые}$$

стратегии Первого игрока по критерию Ходжа-Лемана.

С точки зрения Первого игрока (при $\beta = 0,9$) и заданном распределении вероятностей $\vec{q} = (0,45; 0,35; 0,2)$ заполним вспомогательную расчётную таблицу 2.

Таблица 2

δ_i	$\sum_{j=1}^3 a_{ij} q_j$	$\max_{\theta_j} a_{ij}$	$\beta \sum_{j=1}^3 a_{ij} q_j + (1-\beta) \max_{\theta_j} a_{ij}$
δ_1	1,05	3	1,245
δ_2	0,25	1	0,325
δ_3	-1,35	3	-0,915

Минимум критерия Ходжа-Лемана равен $-0,915$, т.е. оптимальная чистая стратегия Первого игрока есть стратегия $\delta^* = \delta_3$.

Задачи к 2.1

2.1.1. Дана матрица потерь Первого игрока

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 & 15 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 10 & 8 \\ -1 & 3 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Согласно критерию Лапласа}$$

определите оптимальную чистую стратегию Первого игрока.

2.1.2. Рассматривается A -игра формата (3×3) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ потерь Первого игрока. Известно, что}$$

Первый игрок руководствуется критерием Лапласа и принимает решение согласно этому критерию. Составьте три различных варианта матрицы A в числах таким образом, чтобы для первой матрицы оптимальной чистой стратегией являлась стратегия δ_1 , во второй матрице – стратегия δ_2 и в третьей – стратегия δ_3 .

Примечание: числа для составления матриц можно использовать произвольные.

2.1.3. Матрица потерь Первого игрока имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & 1 \\ 4a & a-1 & a \\ b+a & b+1 & a-b \end{pmatrix}. \text{ Известно, что средние (ожидаемые)}$$

потери Первого игрока при выборе им своей чистой стратегии δ_1 такие же как и при выборе им чистой стратегии δ_2 , согласно критерию Лапласа. Также известно, что средние потери Первого игрока согласно критерию Лапласа при выборе им своей чистой стратегии δ_3 равны 5. Определите числовые значения параметров a , b , запишите матрицу A при найденных a , b и сделайте проверку.

2.1.4. Дана матрица потерь Первого игрока вида

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 & -6 & 17 \\ 3 & 14 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 14 & 20 & -3 \\ 7 & 19 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 5}.$$

Найдите оптимальные чистые стратегии игроков по критериям принятия решения в условиях неопределённости: Лапласа, Сэвиджа, Гурвица, Ходжа-Лемана. В критерии Гурвица показатель оптимизма примите равным 0,5. В критерии Ходжа-

Лемана показатель доверия к распределению вероятностей выберите равным 0,7 как для Первого, так и для Второго игрока, а вероятности использования игроками своих чистых стратегий примите равными $q = (0,4; 0,15; 0,05; 0,2; 0,2)$ и $p = (0,35; 0,05; 0,4; 0,2)$. В критерии Сэвиджа рассмотрите матрицу A как: а) матрицу потерь Первого игрока, б) матрицу выигрышей Первого игрока.

2.1.5. Один из N станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, размер которой может принимать любое значение в пределах $Q_1 \leq Q \leq Q_2$. Производственные затраты для i -го станка задаются следующей функцией $c_i = k_i + a_i Q$, $i = 1, 2, \dots, N$. Найдите решение, используя все вышеописанные критерии в §2.1.

§2.2. Методы принятия оптимальных решений в условиях риска

Как и в случае принятия решений в условиях неопределённости, в условиях риска решения принимаются при *ограниченности* или *неточности* информации. Степень неполноты данных выражается через *функцию распределения*. С точки зрения наличия исходных данных, определённость и неопределённость представляют два крайних случая, а риск определяет промежуточную ситуацию.

Мы рассмотрим следующие критерии принятия решений *в условиях риска*:

- 1) критерий *ожидаемого значения* (прибыли или расхода),
- 2) критерий *комбинации ожидаемого значения и дисперсии*,
- 3) критерий *известного предельного уровня*,
- 4) критерий *наиболее вероятного события в будущем*.

Критерий ожидаемого значения

Количественно этот критерий можно выразить в денежных единицах или в единицах полезности денег. Продемонстрируем

это на примере. Предположим, что инвестиции 20 тысяч долларов дают с равными вероятностями либо нулевой доход, либо 100 тысяч долларов. В денежных единицах ожидаемый доход составляет:

$$0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 100 - 20 = 30.$$

Можно принять решение о вложении денег, однако это решение не в равной степени приемлемо для всех вкладчиков. Допустим имеются два вкладчика А и В. У вкладчика А средства ограничены и потеря 20 тысяч долларов приведет его к банкротству. Вкладчик В имеет средства, значительно превышающие 20 тысяч долларов, это бездействующий капитал и он может рисковать.

Предположим, что Z – случайная величина с математическим ожиданием EZ и дисперсией DZ . Пусть имеется выборка из значений данной случайной величины объема n : $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Тогда выборочное среднее равно $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$.

Выборочное среднее имеет дисперсию

$$D\bar{z} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Dz_1 = \frac{1}{n} DZ.$$

Отсюда следует, что $D\bar{z} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. По закону больших чисел $\bar{z} \rightarrow EZ$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, можно сделать следующий вывод: использование критерия ожидаемого значения допустимо лишь в том случае, когда одно и то же решение приходится принимать достаточно большое число раз.

Пример 2.2.1. Предположим, что есть необходимость профилактического ремонта оборудования. Требуется принять решение о том, когда следует проводить ремонт какого-либо станка чтобы минимизировать потери. Если весь временной отрезок разбит на равные периоды, то решение заключается в определении оптимального числа периодов между двумя ремонтами.

Предположим, что имеется n станков, через T интервал времени выполняется профилактический ремонт всех n станков.

Определить оптимальное значение T , при котором минимизируются затраты на ремонт вышедших из строя станков и проведение профилактического ремонта в расчете на один интервал времени.

Пусть p_t – вероятность выхода из строя одного станка в момент времени T ; n_t – случайная величина, число вышедших из строя станков (имеет биномиальное распределение с параметрами n, p_t , таким образом математическое ожидание $En_t = np_t$); c_1 – затраты на ремонт вышедшего из строя станка; c_2 – затраты на профилактический ремонт; $EC(T)$ – ожидаемые затраты за один интервал времени. Из условий получим

$$EC(T) = \frac{1}{T} \left[c_1 \sum_{t=1}^{T-1} En_t + c_2 n \right] = \frac{1}{T} \left[n \left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + c_2 \right) \right].$$

Требуется найти значение T , удовлетворяющее условиям

$$T^*: \begin{cases} EC(T^* - 1) \geq EC(T^*) \\ EC(T^* + 1) \geq EC(T^*) \end{cases}.$$

Покажем это на нашем примере.

Пусть $c_1 = 100$, $c_2 = 10$, $n = 50$. Составим следующую таблицу:

T	P_t	$\sum_{t=1}^{T-1} P_t$	$EC(T)$
1	0,05	0	500
2	0,07	0,05	375
3	0,10	0,12	366,7
4	0,13	0,22	400
5	0,18	0,35	450

Из таблицы видно, что $T^* = \min T = 366,7$. Т.е. ремонт следует производить через 3 периода.

Критерий комбинации ожидаемого значения и дисперсии

Предположим, что z – случайная величина с дисперсией Dz .

Выборочное среднее $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ имеет дисперсию $D\bar{z} = \frac{Dz}{n}$.

Если дисперсия Dz уменьшается, то дисперсия $D\bar{z}$ также уменьшается, и это означает, что вероятность того, что $\bar{z}$ будет приближаться к Ez , увеличивается.

В условиях этого критерия выбирается:

$\max\{Ez - k\sqrt{Dz}\}$ в случае выбора ожидаемого значения прибыли, или $\min\{Ez + k\sqrt{Dz}\}$, в случае выбора ожидаемого значения затрат, где k – уровень не склонности к риску (постоянная величина).

Пример 2.2.2. В условиях предыдущего примера посчитаем дисперсию затрат за один период времени:

$$C(T) = \frac{1}{T} (C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + nC_2),$$

где n_t – случайная величина, которая имеет биномиальное распределение. Вычислим дисперсию:

$$\begin{aligned} DC(T) &= \frac{1}{T^2} c_1^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \\ &= \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 \right\} \end{aligned}$$

Выбираем то значение T , которое удовлетворяет:

$$\min\{EC(T) + k\sqrt{Dz}\}.$$

Пусть $k = 1$, $c_1 = 100$, $c_2 = 10$, $n = 50$.

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$EC(T) + \sqrt{DC(T)}$
1	0,05	0	0	500
2	0,07	0,05	0,025	430,90
3	0,10	0,12	0,074	422,48
4	0,13	0,22	0,0174	430,91
5	0,18	0,35	0,0343	528,36

Из таблицы находим $T^* = 3$.

Критерий предельного уровня

Этот критерий не дает оптимального решения, а соответствует определению приемлемого способа действий. Продемонстрируем на следующем примере.

Пример 2.2.3. Пусть величина спроса ξ на некоторый товар задается непрерывной функцией распределения $F_\xi(x)$. Если запасы в начальный момент не велики, в дальнейшем возможен дефицит. В противном случае к концу рассматриваемого периода запасы нереализованного товара могут оказаться очень большими. Человек, который принимает решение, может установить необходимый уровень запаса таким образом, чтобы величина ожидаемого дефицита не больше A_1 , а величина излишков не превосходила A_2 .

Необходимый уровень запаса I определяется следующим образом:

$$ES(I) = \int_I^\infty (t - I) p_\xi(t) dt \leq A_1,$$
$$EH(I) = \int_0^I (I - t) p_\xi(t) dt \leq A_2.$$

Пусть плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид:

$$p_\xi(t) = \begin{cases} \frac{20}{t^2}, & 10 \leq t \leq 20 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тогда

$$\int_I^{20} (t - I) \frac{20}{t^2} dt = \int_I^{20} \frac{20}{t} dt - I \cdot 20 \int_I^{20} \frac{dt}{t^2} = 20 \left[\ln \frac{20}{I} + \frac{I}{20} - 1 \right],$$
$$\int_{10}^I (I - t) \frac{20}{t^2} dt = 20 \cdot I \int_{10}^I \frac{dt}{t^2} - 20 \int_{10}^I \frac{dt}{t} = 20 \left[\ln \frac{10}{I} + \frac{I}{10} - 1 \right],$$

$$\begin{cases} 20 \left[\ln \frac{20}{I} + \frac{I}{20} - 1 \right] \leq A_1 \\ 20 \left[\ln \frac{10}{I} + \frac{I}{10} - 1 \right] \leq A_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -\ln I + \frac{I}{20} \leq \frac{A_1}{20} - \ln 20 + 1 \\ -\ln I + \frac{I}{10} \leq \frac{A_2}{20} - \ln 10 + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \ln I - \frac{I}{20} \geq 1,996 - \frac{A_1}{20} \\ \ln I - \frac{I}{10} \geq 1,302 - \frac{A_2}{20} \end{cases}.$$

Пусть $A_1 = 2$, $A_2 = 4$. Тогда:

$$\begin{cases} \ln I - \frac{I}{20} \geq 1,896 \\ \ln I - \frac{I}{10} \geq 1,102 \end{cases}.$$

Ответ: $I \in [10; 20]$.

Критерий наиболее вероятного исхода

Этот критерий основан на преобразовании случайной ситуации в детерминированную путем замены случайной величины единственным значением, имеющим наибольшую вероятность реализации.

Допустим, имеется изделие j и доход C_j . P_j – вероятность того, что доход принимает это значение $P_j = P(C=C_j)$. По этому критерию надо выбрать такое значение C_j^* , чтобы $C_j^*:P_j^* = \max_C P_j$.

Пример 2.2.4. Пусть Предприятие выпускает некоторое изделие, стоимость на рынке которого является значением случайной величины ξ с известным распределением вероятностей (см. таблицу).

Стоимость (руб.)	10	5	15	30
Вероятность	0,2	0,1	0,3	0,4

Требуется определить значение критерия наиболее вероятного события в будущем. Согласно критерию, мы должны выбрать

такое значение рыночной стоимости, которое имеет наибольшую вероятность реализации. Это значение равно 30 рублям.

Задачи к 2.2

2.2.1. В производственном процессе партии товаров, имеющие 8%, 10%, 12% и 14% брака выпускаются с вероятностью 0,4; 0,3; 0,25; и 0,05 соответственно. Производитель связан контрактами с тремя потребителями. В них оговорено, что процент брака в партиях, направляемых потребителям А, В и С не должен превышать 8%, 12% и 14% соответственно. Если процент брака превышает обусловленного, то штраф составляет 100 долларов за 1% превышения. С другой стороны производство партии более высокого качества, чем требуемое, приводит к увеличению затрат производителя на 50 долларов за 1%. Кто из потребителей будет иметь наибольший приоритет при выполнении заказа, если партия не проверяется перед отправкой?

2.2.2. Спрос на некоторое изделие описывается следующей таблицей распределения:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,1

Определить уровень запасов, при котором вероятность полного истощения запасов не превышает 0,65.

Определите также уровень запасов при условии, что среднее значение дефицита и превышения запаса не должны быть выше 1 и 2 единиц соответственно.

2.2.3. Автомат производит α тысяч единиц некоторого продукта ежедневно. Если α увеличивается, доля брака ξ возрастает. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ дается следующей формулой:

$$p_{\xi}(t) = \begin{cases} \alpha \cdot t^{\alpha-1}, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Каждое бракованное изделие приносит убыток в 50 долларов. Годное изделие дает прибыль 5 долларов. Определите, при каком значении α ожидаемая прибыль принимает максимальное значение. Примените критерий ожидаемое значение – дисперсия. Сравните оптимальные решения для значений показателя несклонности к риску $k = 1, 2, 5$.

Глава 3. Методы оптимальных решений в системах массового обслуживания

§3.1. Некоторые сведения из Теории случайных процессов

Теория случайных процессов изучает закономерности случайных явлений в динамике их развития.

Случайный процесс – это функция $X(t, \omega) : T \times \Omega, t \in T, \omega \in \Omega$, которая определяется так: при фиксированном t функция $X(t, \omega)$ является обычной случайной величиной (сечение случайного процесса в момент t), при фиксированном ω функция $X(t, \omega)$ является обычной функцией (реализация случайного процесса).

В дальнейшем процесс $X(t, \omega)$ обозначим через $X(t)$. Случайный процесс $X(t)$ – это совокупность всех сечений при всевозможных значениях t . Поэтому для его описания необходимо рассмотреть многомерную случайную величину, состоящую из всех сечений данного процесса $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$.

Рассмотрим числовые характеристики случайного процесса.

1. Математическое ожидание.

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $a_x(t)$, которая при любом значении t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса $X(t)$, т.е. $a_x(t) = EX(t)$.

2. Дисперсия.

Дисперсией случайного процесса называется функция $D_x(t)$, которая при любом значении t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса $X(t)$, т.е. $D_x(t) = DX(t)$.

Математическое ожидание процесса характеризует среднюю траекторию всех возможных его реализаций, а дисперсия процесса характеризует разброс реализаций относительно средней траектории.

Зависимость между сечениями характеризуется **корреляционной функцией**. Корреляционной функцией называется неслучайная функция $K_x(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - a_x(t_1))(X(t_2) - a_x(t_2))]$, которая при каждой паре t_1 и t_2 равна ковариации соответствующих сечений. $K_x(t_1, t_2)$ характеризует не только степень тесноты линейной зависимости между сечениями, но и разброс этих сечений относительно математического ожидания. **Нормированная корреляционная функция** определяет степень тесноты линейной зависимости между сечениями, она определяется так: $\rho_x = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$, где σ - среднеквадратическое отклонение.

Пример 3.1. Пусть случайный процесс определяется формулой $X(t) = X \cos \omega t$, где X – случайная величина. $EX = a$, $DX = \sigma^2$. Числовые характеристики процесса определяются так:

$$a_x(t) = EX(t) = E(X \cos \omega t) = \cos \omega t EX = a \cos \omega t,$$

$$D_x(t) = DX(t) = D(X \cos \omega t) = \sigma^2 \cos^2 \omega t,$$

$$K_x(t_1, t_2) = E[(X \cos \omega t_1 - a \cos \omega t_1)(X \cos \omega t_2 - a \cos \omega t_2)] = \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 E(X - a)^2 = \sigma^2 \cdot \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2,$$

$$\rho_x = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} = \frac{\sigma^2 \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2}{\sigma \cos \omega t_1 \cdot \sigma \cos \omega t_2} = 1.$$

Приведем Примеры известных случайных процессов (необходимые нам в данной главе).

Марковский процесс. Случайный процесс $X(t)$ называется марковским, если для любого момента t вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент, и не зависят от того, когда и как процесс пришел в это состояние.

Пусть $X(t)$ – марковский процесс. Обозначим $E_k = \{X(t) = k\}$ – состояние процесса (процесс принимает значение k в момент

t). Если t – *дискретное*, $X(t)$ – марковский процесс со счётным множеством значений и дискретным временем (дискретные цепи Маркова, см. Теорию вероятностей). Если t – *непрерывное*, $X(t)$ – марковский процесс со счётным множеством значений и непрерывным временем.

Пусть $P_{ij}(t)$ – вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j за промежуток времени t . Эти вероятности подчиняются уравнению Колмогорова-Чепмена (см. Теорию вероятностей):

$$P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(t) P_{jk}(s)$$

Данное уравнение утверждает, что вероятность попасть из состояния i в состояние j за промежуток времени $t+s$ определяется так: процесс переходит в состояние E_k за время t , а оттуда в состояние E_j за время s .

Пуассоновский процесс. Пуассоновский процесс – это процесс $X(t)$, для которого вероятности состояний определяются так:

$$P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Отметим, что Пуассоновский процесс – это процесс, когда переход возможен только из состояния E_i в состояние E_{i+1} с интенсивностью λ . Остальные переходы маловероятны.

Примечание. Вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_{i+1} будет равна $\lambda t + o(t)$, где $o(t)$ – бесконечно малая. Остальные вероятности перехода будут равны $o(t)$.

Процесс размножения и гибели (ПРГ). Процесс размножения и гибели – это процесс $X(t)$, для которого переход из состояния E_i возможен либо в состояние E_{i+1} , либо в состояние E_{i-1} . Остальные переходы маловероятны.

Более подробно о последних двух процессах поговорим ниже.

§3.2. Введение в Теорию массового обслуживания

Теория массового обслуживания иначе называется Теория очередей. И действительно, теория массового обслуживания в значительной степени посвящена изучению очередей, возникающих в различных системах.

Основными характеристиками систем массового обслуживания являются следующие случайные величины:

- время пребывания клиента в очереди;
- доля времени, в течение которого система простаивает (из-за отсутствия клиентов).

Функциональные возможности систем массового обслуживания определяются следующими факторами:

- распределением вероятностей моментов поступления клиентов;
- распределением вероятностей продолжительности обслуживания;
- конфигурацией обслуживающей системы (последовательное, параллельное или параллельно-последовательное обслуживание);
- дисциплиной очереди (обслуживание в порядке поступления, обслуживание в обратном порядке, случайный отбор клиентов);
- вместимостью блока ожидания (ограниченная или неограниченная);
- емкостью или мощностью источника требования (ограниченная и неограниченная);
- некоторыми другими характеристиками системы (возможности клиентов переходить из одной очереди в другую, ненулевая вероятность отказа и др.).

Любая система массового обслуживания состоит из следующих основных элементов: входной поток клиентов; обслуживающий прибор и дисциплина очереди.

§3.3. Входной поток клиентов

Рассмотрим последовательности случайных величин

$$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}; \quad \{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Предположим, что $t_0 = 0$ – начальный момент функционирования системы; $t_1 = t_0 + \tau_1$, $t_2 = t_1 + \tau_2$, ..., $t_k = t_{k-1} + \tau_k$, ..., где τ_k – независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Здесь t_1 – момент поступления первого клиента, τ_1 – промежуток времени между началом работы системы и моментом прихода первого клиента, t_2 – момент поступления второго клиента, τ_2 – промежуток времени между моментами прихода первого и второго клиентов, и т.д.

Последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, заданная вышеуказанным образом называется *простейшим (пуассоновским) потоком*. А постоянная λ называется параметром простейшего потока.

Свойства простейшего потока

1. Сдвиг потока на величину T .

Пусть имеется простейший поток $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ с параметром λ .

Сдвигая поток на величину T , получаем поток $\{\tilde{t}_k\}_{k=0}^{\infty}$, который также будет являться простейшим потоком с тем же параметром λ . Например, если T находится между t_1 и t_2 , то новый поток выглядит так:

$$\tilde{t}_0 = T, \quad \tilde{t}_1 = t_2 = T + \tau_1, \quad \tilde{t}_2 = t_3 = t_2 + \tau_3, \dots$$

2. Слияние двух потоков.

Пусть имеются два независимых простейших потока $\{t_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{t_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$ с параметрами $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ соответственно. Будем говорить, что поток $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ образовался в результате слияния двух потоков, если множество $\{t_k\}$ есть объединение множеств $\{t_k^{(1)}\}$, $\{t_k^{(2)}\}$ и элементы множества $\{t_k\}$ упорядочены в порядке возрастания. Поток $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ получившийся в результате слияния двух

независимых простейших потоков $\{t_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{t_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$, является также простейшим потоком с параметром $\lambda = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}$.

3. Разделение простейшего потока.

Пусть имеется простейший поток $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ с параметром λ , и последовательность независимых случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, принимающих два значения:

$$P(\xi_k = 1) = p, \quad P(\xi_k = 0) = q, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p + q = 1.$$

Такие случайные величины называются *бернуллиевскими* (с параметром p). Процедура разделения потока $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ состоит в следующем: число t_k отнесем к первому потоку, если $\xi_k = 1$; если же $\xi_k = 0$, то число t_k отнесем ко второму потоку. Такую операцию разделения потока на два потока назовем *бернуллиевской* (с параметром p). Потоки $\{t_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{t_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$, полученные в результате бернуллиевского разделения простейшего потока $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, являются независимыми простейшими потоками с параметрами $\lambda^{(1)} = \lambda p$ и $\lambda^{(2)} = \lambda q$, соответственно.

Через $X(t)$ в дальнейшем будем обозначать число клиентов в системе в момент t , т.е. $X(t) = \max\{k : t_k \leq t\}$.

Процесс (число поступающих в систему клиентов), которого мы в дальнейшем будем рассматривать, является одновременно Пуассоновским, Марковским, а также процессом размножения и гибели. Нам будет полезно знать свойства данного процесса.

Свойства пуассоновского процесса

1) *Приращение пуассоновского процесса однородное.*

Обозначим через $X((a,b]) = X(b) - X(a)$ приращение процесса, которое может быть интерпретировано как число клиентов, поступающих в систему в промежутке $(a,b]$. Однородность означает выполнение условия:

$$P(X((a,b]) = k) = P(X((0,b-a]) = k) = P(X(b-a) = k),$$

т.е. распределение вероятностей числа клиентов, поступающих в систему в промежутке $(a,b]$, зависит только от длины этого промежутка.

2) *Приращения пуассоновского процесса независимы.*

Рассмотрим промежуток $(0, b]$ и предположим, что он разбит на непересекающиеся промежутки $(0, b_1], (b_1, b_2], \dots, (b_{N-1}, b_N]$. Пусть $b_0 = 0$. Тогда $X((b_0, b_1])$, $X((b_1, b_2])$, $\dots$, $X((b_{N-1}, b_N])$ – число клиентов, поступающих в систему в соответствующие периоды времени. Эти величины независимы, т.е.

$$\begin{aligned} P(X((b_0, b_1]) = i_1, \dots, X((b_{N-1}, b_N]) = i_N) = \\ = P(X((b_0, b_1]) = i_1) \cdots P(X((b_{N-1}, b_N]) = i_N). \end{aligned}$$

Задачи к §3.3

3.3.1. Имеются две случайные величины τ_1 и τ_2 . Они независимые и имеют показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 , соответственно. Введем следующую случайную величину: $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$. Доказать, что эта величина имеет показательное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

3.3.2. Даны две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 , имеющие пуассоновское распределение с параметром λ_1 и λ_2 , соответственно. Пусть случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Доказать, что эта величина имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

3.3.3. Пусть ξ – число клиентов в магазине и имеет распределение Пуассона с параметром λ . Пусть каждый клиент с вероятностью p делает покупку в этом магазине. Требуется доказать, что число клиентов, сделавших покупку в этом магазине, имеет распределение Пуассона с параметром λp .

3.3.4. Посетители приходят в ресторан в соответствии с пуассоновским потоком со средней частотой 20 посетителей в час. Ресторан открывается в 11.00.

Найти:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторане окажется 20 посетителей при условии, что в 11.07 в ресторане было 18 посетителей;

б) вероятность того, что новый посетитель прибудет в ресторан в интервале между 11.28 и 11.30, если известно, что предыдущий посетитель прибыл в ресторан в 11.25.

3.3.5 Продукция берется со склада, вмещающего 80 единиц складированной продукции, в соответствии с пуассоновским потоком с интенсивностью 5 единиц продукции в день.

Найти:

а) вероятность того, что в течении первых двух дней со склада будет взято 10 единиц продукции;

б) вероятность того, что к концу четвертого дня на складе не останется ни одной единицы продукции.

§3.4. Процесс размножения и гибели

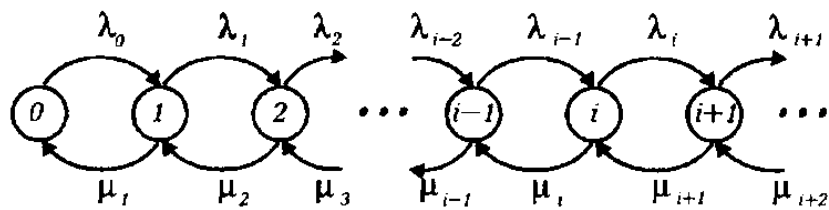
Рассмотрим две числовые последовательности $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Первая последовательность отвечает за поступление клиентов в систему (размножение), а вторая - за обслуживание клиентов (гибель):

$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ - интенсивность поступления клиентов (среднее число клиентов, которое поступает в систему за единицу времени, если в ней имеется k клиентов).

$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ - интенсивность обслуживания клиентов (среднее число клиентов, которое обслуживается в системе за единицу времени, если в ней имеется k клиентов).

Процесс $X(t), t \geq 0$, называется однородным по времени процессом гибели и размножения; его распределения полностью определяются набором параметров $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, и начальным распределением $X(0)$: $P_k(0) = P(X(0) = k)$, $k = 0, 1, \dots$.

Удобно использовать следующую диаграмму для представления развития процесса $X(t)$:



Стрелочки сверху соответствуют динамике процесса размножения: из i -го состояния процесс переходит в $(i+1)$ -е состояние с интенсивностью λ_i ; стрелочки снизу соответствуют динамике процесса гибели: с интенсивностью μ_i процесс из i -го состояния переходит в $(i-1)$ -е состояние.

Набор функций

$$P_k(t) = P(X(t) = k), \quad t \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

описывает распределение процесса $X(t)$; ниже мы приведем систему уравнений, которым удовлетворяют эти функции.

Процессы $X(t)$, для которых все $\mu_k = 0$, относятся к так называемым *процессам чистого размножения*. Процессы, для которых $\lambda_k = 0$, называют *процессами чистой гибели*.

Следующая лемма дает необходимые и достаточные условия на параметры $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, которые гарантируют конечность процесса чистого размножения $X^+(t)$ с параметрами $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Лемма. Пусть $X^+(t)$ процесс чистого размножения с параметрами $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$. Тогда для конечности процесса $X^+(t)$ необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$.

Пусть $X(t)$ процесс гибели и размножения с теми же параметрами $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ процесса $X^+(t)$, а также параметрами $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, что

$$P(X(t) < \infty) \geq P(X^+(t) < \infty).$$

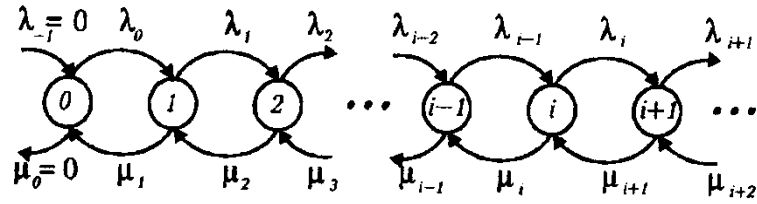
Поэтому из леммы получаем следствие.

Следствие. Если для произвольного процесса гибели и размножения $X(t)$ выполнено условие расходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$, то для любого $t \geq 0$ справедливо $P(X(t) < \infty) = 1$, т.е. процесс конечен.

Предположим, что $X(t)$ – процесс размножения и гибели с характеристиками $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть для некоторых конечных чисел A и B имеют место неравенства $\lambda_k \leq A + Bk$, $k = 0, 1, \dots$. Это условие гарантирует конечность процесса $X(t)$. При этом мы условимся, что в каждое состояние приходит верхняя стрелочка слева (даже в состояние 0), при этом интенсивность рождения λ может равняться нулю (например, $\lambda_{-1} = 0$); из каждого состояния выходит нижняя стрелочка влево, и интенсивность гибели μ тоже может равняться нулю (например, $\mu_{-1} = 0$). Доопределение таким образом диаграммы не меняет суть

дела, однако в дальнейших рассуждениях будет полезно.

Рассмотрим диаграмму, отвечающую нашему процессу $X(t)$:



Обозначим, как и ранее, через

$$P_k(t) = P(X(t) = k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

вероятности того, что в фиксированный момент t число клиентов $X(t)$ будет равно k .

Теорема. Характеристики $P_k(t)$ процесса $X(t)$, определенное выше, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$P'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t), \quad (1)$$

где $k = 0, 1, \dots$, и начальным условиям

$$P_k(0) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$P'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t),$$

если существуют пределы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1, \quad (2)$$

то вероятности P_k называются *стационарными вероятностями (характеристиками)*, а относительно системы говорят, что она находится в *стационарном (установившемся) режиме*. Стационарные вероятности удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$-(\lambda_k + \mu_k)P_k + \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3).$$

Система (3) получается, если приравнять нулю левую часть системы (1). Решая последовательно систему (3), можно выразить числа P_k через P_0 :

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} P_0.$$

Подставляя в соотношение (2) получаем:

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} P_0 = 1.$$

Очевидно далее, что сходимость ряда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$$

есть условие существования стационарного режима в системах массового обслуживания. В этом случае стационарные характеристики P_k процесса $X(t)$ находятся с помощью формул

$$P_0 = \frac{1}{1+S}, \quad P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} P_0, \quad k=1, 2, \dots$$

Задачи к §3.4

3.4.1. Рассмотрим процесс размножения и гибели, для которого

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\lambda, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & k > N \end{cases} \quad \text{и} \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & k > N \end{cases}$$

Требуется изобразить диаграмму, отвечающую этому процессу.

3.4.2. Пусть клиенты, которые хотят получить справку по телефону, образуют простейший поток с параметром λ . Пусть каждый разговор длится μ -показательное время. Пусть $X(t)$ – число клиентов в системе в момент t . Изобразить диаграмму, отвечающую процессу $X(t)$. Выписать дифференциальные уравнения, связывающие вероятности $P_k(t) = P(\text{в системе в момент } t \text{ находится } k \text{ клиентов})$. Найдите решение системы

дифференциальных уравнений, а также стационарные вероятности.

3.4.3. Пусть

- 1) телефон имеет память на одного клиента: если клиент звонит и телефон занят, но память телефона свободна, то автомат предлагает положить трубку и ждать звонка. Когда телефон освободится, звонок прозвучит;
- 2) имеется автоматический коммутатор и два телефона, у каждого телефона свой оператор: если в момент звонка клиента имеется свободный телефон, то коммутатор автоматически адресует клиента на этот телефон;
- 3) коммутатор (см п.2)) имеет память на одного клиента;
- 4) каждый телефон (см.п.2)) имеет память на одного клиента.

Выписать дифференциальные уравнения, связывающие вероятности $P_k(t) = P(\text{в системе в момент } t \text{ находится } k \text{ клиентов})$. Найдите решение системы дифференциальных уравнений, а также стационарные вероятности.

3.4.4. Установить, являются ли конечными процессы чистого размножения со следующими интенсивностями размножения:

- а) $\lambda_k = k\lambda + \alpha$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, $k = 0, 1, \dots$
- б) $\lambda_0 = 1$, $\lambda_{k+1} = (k+1)\lambda_k$, $k = 0, 1, \dots$
- в) $\lambda_k = \gamma^k$, $k = 0, 1, \dots$ $\gamma > 0$.

§3.5. Основные типы систем массового обслуживания

Для описания СМО используется обозначение $\langle \cdot | \cdot \rangle (\cdot)$.

Первое место в этом обозначении характеризует входной поток, а именно, характеризует распределение вероятностей промежутков времени между поступлениями соседних клиентов.

Второе место является характеристикой обслуживающих приборов, а именно, характеризует распределение вероятностей времени обслуживания.

Третье место характеризует число обслуживающих приборов (однотипных, на которых стоит одна очередь).

Четвертое место характеризует дисциплину очереди.

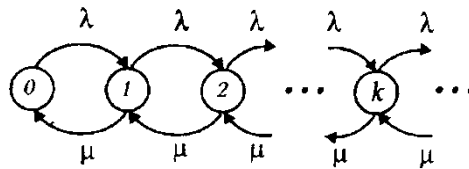
В основном мы будем изучать системы, когда в качестве распределения, стоящих на первом и втором местах, будет использоваться показательное распределение. Это связано с тем, что такие СМО адекватно описываются процессами гибели и размножения, которые мы изучали выше. И, такие системы будут обозначаться следующим образом:

$\langle M|M|m \rangle$ (очередь длины N) или $\langle M_\lambda|M_\mu|m \rangle$ (очередь длины N).

Рассмотрим подробно некоторые известные системы.

1. Система $\langle M|M|1 \rangle$ (с очередью)

Предположим, что $X(t)$ – число клиентов в системе в момент t , и интенсивность поступления и обслуживания клиентов не меняется, т.е. $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, \dots$ $\mu_k = \mu, k = 1, 2, \dots$ Диаграмма выглядит так:



Проверяем стационарность системы, для этого исследуем сходимость ряда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\mu^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k.$$

Обозначим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Если $\rho < 1$, то $S < \infty$ и стационарный режим существует. Если же $\rho \geq 1$, то $S = \infty$. Таким образом в данной системе стационарный режим существует тогда и только тогда, когда $\rho < 1$. В условиях существования стационарного режима найдем:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k = \frac{\rho}{1-\rho},$$

$$P_0 = (1+S)^{-1} = \left(1 + \frac{\rho}{1-\rho}\right)^{-1} = 1-\rho$$

$$P_k = P_0 \rho^k = \rho^k (1-\rho), \quad k=0, 1, ..$$

Найдем также среднее число клиентов в системе:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cdot (1-\rho) = \dots = \frac{\rho}{1-\rho},$$

и среднее число клиентов в очереди:

$$EX_{очер} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k - \sum_{k=1}^{\infty} P_k = EX - (1-P_0) = EX - \rho.$$

Еще одной важной характеристикой системы является q – время ожидания начала обслуживания в стационарном режиме.

Лемма 1. Если $\rho < 1$, то вероятность того, что $q \geq x$, равна

$$P(q \geq x) = \rho e^{-(\mu-\lambda)x}.$$

Т.е. прежде чем начнут обслуживать, придется ждать как минимум x единиц времени. Отсюда можно получить (проверьте самостоятельно) среднее время ожидания начала обслуживания, или среднее время, проведенное в очереди:

$$Eq = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Величина Eq является важной характеристикой «качества» обслуживания: чем меньше Eq , тем обслуживание лучше.

Обозначим через Ev – среднее время, проведенное в системе:

$$Ev = Eq + \frac{1}{\mu}.$$

Тогда

$$EX = \lambda \cdot Ev, \quad EX_{очер} = \lambda \cdot Eq.$$

2. Система $\langle M|M|m \rangle$ (с очередью)

Пусть $X(t)$ – число клиентов в системе в момент t .

Предположим, что $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, \dots$ и $\mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{если } 1 \leq k \leq m \\ m\mu, & \text{иначе} \end{cases}$.

Найдем условие стационарности. Для этого исследуем сходимость ряда S .

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{m! \mu^k m^{k-m}} = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m+n}}{\mu^{m+n} m^n} = \sum_{k=1}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^n. \end{aligned}$$

Если $\rho < m$, то $S < \infty$ и стационарный режим существует. Таким образом в данной системе стационарный режим существует тогда и только тогда, когда $\rho < m$. В условиях существования стационарного режима найдем:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{\rho/m}{1-\rho/m}, \\ P_0 &= \frac{1}{1+S}, \\ P_k &= \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{1}{1+S}, & 0 \leq k \leq m \\ \frac{\rho^k}{m! m^{k-m}} \cdot \frac{1}{1+S}, & k > m, \end{cases} \\ EX &= \sum_{k=1}^{\infty} k P_k, \quad EX_{очер} = \sum_{k=m}^{\infty} (k-m) P_k. \end{aligned}$$

Предположим, что q – время, проведенное в очереди.

Лемма 2. При $\rho < m$ вероятность того, что $q \geq x$ равна

$$P(q \geq x) = P_3 \cdot e^{-(m\mu - \lambda)x},$$

$$\text{где } P_3 = \sum_{k=m}^{\infty} P_k = \frac{\rho^m}{(m-1)!(S+1)(m-\rho)}$$

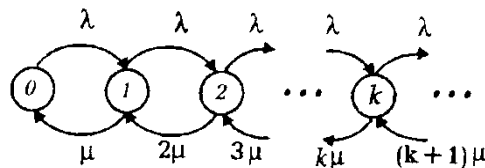
- вероятность того, что все приборы заняты.

Тогда среднее время, проведенное в очереди (проверьте самостоятельно)

$$Eq = \frac{P_3}{\mu(m - \rho)}.$$

3. Система $\langle M | M | \infty \rangle$

Это система, когда любому вновь прибывшему клиенту находят прибор. Предположим, что $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, \dots$; $\mu_k = k\mu$, $k = 1, 2, \dots$ Диаграмма выглядит так:



Найдем условие стационарности.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} = e^{-\rho} - 1 < \infty.$$

Т.е. независимо от того, какой ρ , стационарный режим существует всегда. Отсюда,

$$P_0 = \frac{1}{1+S} = e^{-\rho}, \quad P_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для системы $\langle M | M | \infty \rangle$ можно вывести формулы: (самостоятельно)

$$EX = \rho, \quad Ev = \frac{1}{\mu}, \quad Eq = Ev - \frac{1}{\mu} = 0.$$

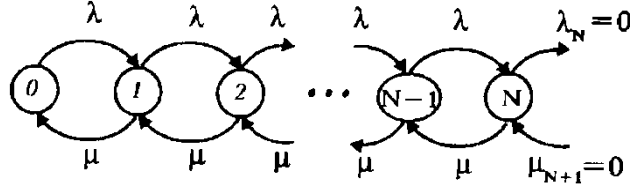
Также можно привести формулы для оценки $P_k(t)$ и в случае, когда процесс еще не достиг стационарного режима:

$$P_k(t) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, \quad k = 0, 1, \dots, \text{ где } \alpha = \rho(1 - e^{-\mu t}).$$

Как видно, и для неустановившегося режима $X(t)$ подчиняется пуассоновскому распределению. Очевидно, что $EX(t) = \alpha$.

4. Система $\langle M \mid M \mid 1 \rangle$ (очередь $\leq N$)

Эта система описывается процессом гибели и размножения $X(t)$ с диаграммой :



Предположим, что

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & k \geq N; \end{cases} \quad \mu_k = \begin{cases} \mu, & 1 \leq k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Очевидно, что при любом соотношении λ и μ существует стационарный режим и

$$S = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \sum_{k=1}^N \rho^k < \infty.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\rho \neq 1$. Тогда

$$S = \sum_{k=1}^N \rho^k = \rho \cdot \frac{\rho^N - 1}{\rho - 1} = \frac{\rho^{N+1} - \rho}{\rho - 1}.$$

Отсюда,

$$P_0 = \frac{1}{1+S} = \frac{\rho - 1}{\rho^{N+1} - 1}, \quad P_k = \rho^k P_0 = \frac{\rho^{k+1} - \rho^k}{\rho^{N+1} - 1}.$$

Можно вычислить также среднее число клиентов в системе в стационарном режиме:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^N k P_k = \frac{\rho - 1}{\rho^{N+1} - 1} \sum_{k=1}^N k \rho^k = \frac{\rho - 1}{\rho^{N+1} - 1} \cdot \rho \cdot \left(\sum_{k=0}^N \rho^k \right)' = \\ &= \frac{\rho - 1}{\rho^{N+1} - 1} \rho \left(\frac{\rho^N - 1}{\rho - 1} \right)' = \rho \cdot \frac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(\rho^{N+1} - 1)(\rho - 1)}. \end{aligned}$$

2) Пусть $\rho = 1$. Тогда

$$S = \sum_{k=1}^N \rho^k = N,$$

$$P_0 = \frac{1}{1+N}, \quad P_k = \rho^k P_0 = \frac{1}{1+N}, \quad k=1, \dots, N,$$

$$EX = \sum_{k=1}^N k P_k = \frac{1}{1+N} \sum_{k=1}^N k = \frac{1}{1+N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N}{2}.$$

Отметим, что другие характеристики находятся по формулам, связывающих их с EX и приведенных в предыдущих системах.

5. Система $\langle M \mid M \mid m \rangle$ (очередь $\leq N$)

Пусть $X(t)$ — число клиентов в системе, характеристики этой системы:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq k < N, \\ 0, & k \geq N; \end{cases} \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu, & 1 \leq k < m, \\ m\mu, & m \leq k \leq N. \end{cases}$$

Напомним, что в этой системе длина очереди не может превышать $N-m$. Найдем стационарные характеристики (они существуют). Пусть

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \sum_{k=m}^N \frac{\lambda^k}{m! m^{k-m} \mu^k} = \left[\frac{\rho = \lambda/\mu}{n = k-m} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{n=0}^{N-m} \frac{\lambda^n \lambda^m}{m! m^n \mu^n \mu^m} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{N-m} \left(\frac{\rho}{m} \right)^n = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{1 - (\rho/m)^{N-m+1}}{1 - \rho/m}. \end{aligned}$$

В случае $\rho/m \neq 1$

$$P_0 = (1+S)^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{1 - (\rho/m)^{N-m+1}}{1 - \rho/m} \right]^{-1},$$

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} P_0, & 0 \leq k \leq m-1, \\ \frac{\rho^k}{m! m^{k-m}} P_0, & m \leq k \leq N. \end{cases}$$

В случае $\rho/m = 1$

$$S = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} (N - m + 1),$$

следовательно

$$P_0 = \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} (N - m + 1) + 1 \right]^{-1},$$

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} P_0, & 0 \leq k \leq m-1, \\ \frac{\rho^k}{m! m^{k-m}} P_0, & m \leq k \leq N. \end{cases}$$

От системы $\langle M | M | m \rangle$ (с очередью) эта система отличается тем, что выражения для P_0 не совпадают, и что $\rho \leq m$ – не обязательное условие для стационарности.

Можно найти

$$EX_{очер} = P_0 \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2} \left[1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N-m} - (N-m) \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N-m} \left(1 - \frac{\rho}{m} \right) \right],$$

если $\rho/m \neq 1$

$$\text{и } EX_{очер} = P_0 \frac{\rho^m (N-m)(N-m+1)}{2m!},$$

если $\rho/m = 1$.

$$EX = EX_{очер} + \lambda(1 - P_N)/\mu.$$

Среднее время, проведенное в очереди

$$Eq = \frac{1}{\lambda(1 - P_N)} EX.$$

Здесь $\lambda(1 - p_N)$ – фактическое число клиентов, обслуженных в единицу времени, т.е. “эффективная” интенсивность входного потока. Иногда $\lambda(1 - p_N)$ обозначают через $\lambda_{эфф}$.

6. Система $\langle M | M | m \rangle$ с ограниченным числом мест в очереди и ограниченным числом источника клиентов

Например, система, где бригада из m специалистов обслуживают N клиентов. Предполагается, что $m < N$ (m механиков,

N машин). Обозначим через λ – интенсивность возникновения обращения к специалисту (интенсивность возникновения неисправности) в расчете на одного клиента, то

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\lambda, & 0 \leq k \leq N, \\ 0, & k \geq N; \end{cases} \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu, & 0 \leq k \leq m, \\ m\mu, & m \leq k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Приведем формулы (получите самостоятельно)

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^m C_N^k + \sum_{k=m+1}^N C_N^k \frac{k! \rho^k}{m! m^{k-m}} \right]^{-1},$$

$$P_k = \begin{cases} C_N^k \rho^k P_0, & 0 \leq k \leq m, \\ C_N^k \cdot \frac{k! \rho^k}{m! m^{k-m}} P_0, & m \leq k \leq N. \end{cases}$$

Для показателей $EX_{очер}$ и EX :

$$EX_{очер} = \sum_{k=m+1}^N (k-m) P_k, \quad (m > 1);$$

$$EX = EX_{очер} + \frac{\lambda_{эфф}}{\mu},$$

где $\lambda_{эфф} = \lambda(N - EX)$ - объясняется так: поскольку интенсивность поступления клиентов при наличие k клиентов равняется $\lambda(N - k)$, где λ – интенсивность обращения к специалисту в расчете на одного клиента, то при условии стационарности

$$\lambda_{эфф} = E(\lambda(N - k)) = \lambda(N - EX)$$

В частном случае, если $m = 1$, то получаем ситуацию, когда один обслуживающий прибор.

Задачи к §3.5

3.5.1. На стоянке автомобилей имеется всего 10 мест, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку в соответствии с пуассоновским потоком при средней частоте 10 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке распределена показательно

со средним значением, равным 10 мин. Система работает достаточно долго. Найти вероятность того, что прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.

3.5.2. Клиенты прибывают к ларьку, в котором продаются прохладительные напитки, в соответствии с пуассоновским потоком при средней частоте 10 человек в час. Продолжительность обслуживания клиентов распределена показательным со средним значением 5 мин. Возле ларька имеются три места для ожидания, включая площадку для стоянки трех автомобилей. Другие подъезжающие к ларьку автомобили размещаются там, где есть свободное для стоянки место (в окрестности ларька). Система работает достаточно долго. Найти:

а) вероятность того, что прибывший к ларьку клиент имеет возможность занять очередь на площадке, отведенной для ожидания;

б) вероятность того, что прибывший клиент окажется вынужденным ждать за пределами площадки, специально отведенной для ожидания обслуживания;

в) среднюю длину интервала времени, в течении которого клиент окажется вынужденным ждать обслуживания;

г) число мест для размещения возле ларька автомобилей с учетом требования, которое заключается в том, чтобы доля среднего времени пребывания клиента в очереди составляла не менее 0,2 общего его пребывания в системе.

3.5.3. Пусть в системе $\langle M|M|2 \rangle$ продолжительность обслуживания одного клиента равняется 5 мин., а средняя длина интервала времени между последовательными поступлениями заявок на обслуживание составляет 8 мин. Система работает достаточно долго. Найти:

а) вероятность возникновения задержки заявки в обслуживающей системе;

б) вероятность того, что хотя бы один из обслуживающих приборов будет незагруженным;

в) вероятность того, что незагруженным окажутся оба обслуживающих приборов.

3.5.4. Закусочная, расположенная около автомагистрали, имеет прилавок, возле которого может остановиться один автомобиль. По статистическим оценкам автомобили подъезжают к закусочной в соответствии с пуассоновским потоком со средней частотой 2 автомобиля за 5 мин. Подъездная дорожка к закусочной позволяет встать в очередь 10 автомобилям (очевидно, что если подъездная дорожка полностью занята очередью автомобилей, то дополнительно прибывающие к месту расположения закусочной автомобили могут расположиться для ожидания в каких-нибудь других местах). Для выполнения заказов клиентов требуется в среднем по 1,5 мин., и продолжительности обслуживания распределены по показательному закону. Требуется вычислить:

а) вероятность того, что у закусочной не окажется ни одного автомобиля;

б) среднее число ожидающих начала обслуживания клиентов;

в) среднее время ожидания от момента прибытия клиента до начала его обслуживания;

г) вероятность того, что количество прибывших к закусочной автомобилей превысит 10.

3.5.5. Рассмотрим работу пункта по обмену валюты. Клиенты приходят в пункт в соответствии с пуассоновским потоком в среднем каждые 6 минут. Время обслуживания одного клиента подчиняется показательному распределению со средним значением, равным 6 минутам. Каждый обслуженный клиент приносит доход в два доллара США (в среднем). Пункт имеет одну кассу обслуживания и два места для ожидания. Посетители, заставшие места для ожидания занятыми, теряются для системы.

Для улучшения работы пункта рассматриваются два инвестиционных проекта:

- а) затратив 200 долларов, оборудовать 4 места для ожидания (добавить еще два кресла);
- б) затратив 1000 долларов, увеличить число мест для ожидания до 10.

Найти среднее время, за которое окупится каждый из этих проектов, если пункт работает 8 часов в сутки.

3.5.6. Решить задачу 3.5.5 для случая, когда клиенты приходят в пункт в среднем каждые 12 минут в соответствии с пуассоновским потоком, а время обслуживания одного клиента то же.

3.5.7. Предположим, что имеются три проекта строительства морского порта: П1 - Построить два порта и в каждом порту соорудить один причал; П2 – Построить один порт с двумя причалами и П3 – Построить один порт с одним причалом, но с производительностью в два раза выше, чем в предыдущих проектах. Какому из проектов следует отдать предпочтение?

3.5.8. В системе с самообслуживанием входной поток является пуассоновским и имеет интенсивность, равная 50 клиентам в час. Продолжительность обслуживания в расчете на одного клиента распределена показательно со средним значением 5 минут. Определить: а) среднее число клиентов, находящихся в произвольно выбранный момент времени в стадии обслуживания; б) часть времени, в течение которого система простаивает

§3.6. Системы массового обслуживания с

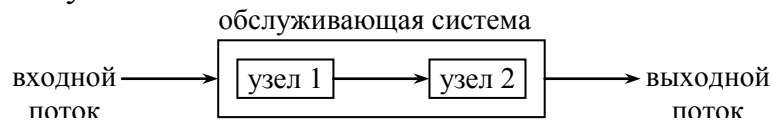
последовательными узлами (приборами) обслуживания

Системы массового обслуживания, где процесс обслуживания заканчивается лишь после прохождения клиента через все приборы обслуживания.

Рассмотрим несколько примеров таких систем.

1. Двухфазная модель систем массового обслуживания с нулевой вместимостью блока ожидания

Простой случай:



Клиент должен сначала пройти прибор 1, а затем прибор 2. Предположим, что продолжительности обслуживания в каждом из приборов распределены показательно с параметром μ и что входной поток пуассоновский с интенсивностью λ . Введем условие: *образование очередей возле узлов недопустимо*. Введем: прибор 1 заблокирован, если обслуживание в приборе 1 завершено, а прибор 2 не готов к приему данного клиента (по причине не завершения обслуживания предыдущего клиента), т.е. клиент не имеет права на ожидание в промежутке между приборами 1 и 2. Для описания модели предположим, что 0, 1 и δ представляют состояние «прибор свободен», «прибор занят» и «прибор заблокирован». Поскольку у нас 2 прибора, то состояние системы будет иметь вид (i, j) , где i – состояние прибора 1, а j – прибора 2. Тогда множество состояний обслуживающей системы выглядит так:

$$\{(i, j)\} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (\delta,1)\}$$

Обозначим через $P_{ij}(t)$ – вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии (i, j) . Эти вероятности удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) \\ P'_{01}(t) = -(\lambda + \mu)P_{01}(t) + \mu P_{10}(t) + \mu P_{\delta 1}(t) \\ P'_{10}(t) = \lambda P_{00}(t) - \mu P_{10}(t) + \mu P_{11}(t) \\ P'_{11}(t) = \lambda P_{10}(t) - 2\mu P_{11}(t) \\ P'_{\delta 1}(t) = \mu P_{11}(t) - \mu P_{\delta 1}(t) \end{cases}$$

Обозначим через $P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ и в указанных уравнениях переходим к пределу. Получаем систему для стационарного режима:

$$\begin{cases} -\lambda P_{00} + \mu P_{01} = 0 \\ -(\lambda + \mu)P_{01} + \mu P_{10} + \mu P_{\delta 1} = 0 \\ \lambda P_{00} - \mu P_{10} + \mu P_{11} = 0 \\ \lambda P_{10} - 2\mu P_{11} = 0 \\ \mu P_{11} - \mu P_{\delta 1} = 0 \end{cases}$$

Обозначим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ и учитывая, что $\sum P_{ij} = 1$, мы получим, решение этой системы:

$$\begin{aligned} P_{00} &= \frac{2}{3\rho^2 + 4\rho + 2}; \quad P_{01} = \frac{2\rho}{3\rho^2 + 4\rho + 2}; \\ P_{10} &= \frac{\rho^2 + 2\rho}{3\rho^2 + 4\rho + 2}; \quad P_{11} = P_{\delta 1} = \frac{\rho^2}{3\rho^2 + 4\rho + 2}. \end{aligned}$$

Отсюда, например, можем найти среднее число клиентов в системе:

$$EX = 0 \cdot P_{00} + 1 \cdot P_{01} + 1 \cdot P_{10} + 2 \cdot P_{11} + 2 \cdot P_{\delta 1} = \frac{5\rho^2 + 4\rho}{3\rho^2 + 4\rho + 2}$$

Пример 3.6.1. Конвейер, на котором производится обработка агрегатов, обслуживается двумя операторами, каждый из которых выполняет конкретную совокупность операций. Размеры агрегатов таковы, что возле рабочего места операторов нельзя разместить более одного агрегата. Те агрегаты, которые не могут быть немедленно приняты для обработки на рассматриваемый конвейер, направляются на другие конвейерные линии. Пусть

агрегаты поступают в соответствии с пуассоновским потоком с интенсивностью 10 штук в час, а продолжительность обслуживания составляет 5 минут в расчете на один агрегат.

Тогда: $\lambda = 10, \mu = 12, \rho = 0,833$;

$$3\rho^2 + 4\rho + 2 = 3(0,833)^2 + 4(0,833) + 2 = 7,417.$$

Получаем: $P_{00} = 0,2697; P_{01} = 0,2247; P_{10} = 0,3181$;

$$P_{11} = P_{\delta 1} = 0,0936; EX = 0,917.$$

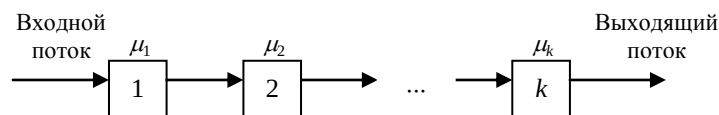
Вероятность того, что поступающий агрегат будет принят Прибором 1 равна $P_{00} + P_{01} = 0,4944$, тогда эффективная интенсивность поступления: $\lambda_{\text{эфф}} = 0,4944 \cdot 10 = 4,944$. Следовательно полное время сборки на конвейерной линии:

$$Ev = \frac{EX}{\lambda_{\text{эфф}}} = \frac{0,917}{4,944} = 0,185 .$$

Среднее время Ev совпадает (по смыслу) со средней продолжительностью обработки одного агрегата, так как образование очереди на конвейере не разрешено. В среднем, агрегат может подвергаться обработке $5+5=10$ мин. Отсюда для того, чтобы прибор 2 не оказался заблокированным (для данного примера), имеется резерв времени: $0,185 - 0,167 = 0,018$ – эту разность можно интерпретировать как среднюю продолжительность задержки в приборе 1 из-за невозможности перехода в прибор 2.

2. k-фазная модель с неограниченной вместимостью блока ожиданий.

Рассмотрим следующую систему массового обслуживания:

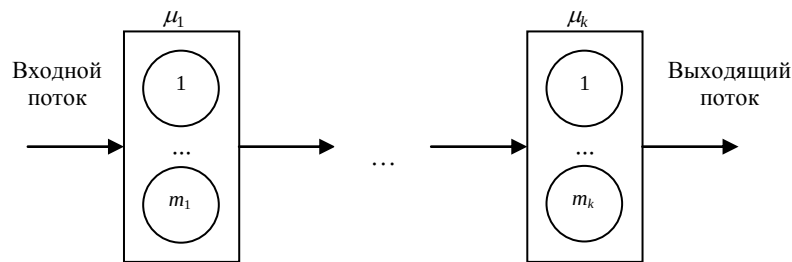


Предположим, что клиенты поступают в соответствии с пуассоновским распределением с интенсивностью λ , распределение продолжительности обслуживания - показательное

с интенсивностью μ_i , $i = 1, \dots, k$. Можно доказать, что в условиях задачи поток клиентов, обслуживаемых каждым из k приборов, является простейшим, и каждый прибор можно рассматривать независимо с помощью СМО $\langle M|M|1 \rangle$ (с очередью). Это означает, что для i -го прибора вероятность P_{ni} в стационарном режиме определяется так: $P_{ni} = (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}$, $n_i = 0, 1, 2, \dots$ — число клиентов, находящихся в системе содержащей i -й блок обслуживания.

Естественно, этот результат справедлив лишь в том случае, когда $\rho_i = \lambda / \mu_i < 1$.

Такой же результат справедлив и в случае, когда i -й прибор состоит из m_i параллельно обслуживающих приборов, которые характеризуются основными μ_i .



В этом случае каждый блок можно рассматривать независимо от других как систему $\langle M|M|m_i \rangle$ (с очередью). И результат справедлив при условии $\lambda < m_i \cdot \mu_i$.

Пример 3.6.2. Пусть на технической линии в цехе промышленного предприятия имеется 5 последовательных приборов. Пусть на прибор1 интенсивность 20 заявок в час. Продолжительность технических процедур – показательное, 2 процедуры в 1 мин. Доля качественной продукции, производимой i -м прибором, обозначим через α_i , интерпретируя α_i как соотношение произведенной в i -м приборе качественной продукции к суммарному объему поступающих в данный прибор заявок на выполнение соответствующего вида работ. Тогда $1 - \alpha_i$ есть доля бракованной продукции, производимой в i -м

технологическом приборе. Вероятность того, что в i -м приборе находится n_i изделий: $P_{ni} = (1 - \rho_i) \cdot \rho_i^{n_i}$. Требуется найти: какую вместимость должны иметь располагаемые между приборами блоки складирования, если требуется разместить все поступающие в очередной технологический блок изделия в течении β -й доли времени, необходимого для обработки изделий в этом приборе.

Требования к вместимости блоков будут удовлетворены при условии, если в месте, отведенном для промежуточного складирования, удастся разместить $N_i - 1$ изделий, где N_i определяется из неравенства:

$$\sum_{n_i=1}^{N_i} P_{ni} = \sum_{n_i=1}^{N_i} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \geq \beta, \quad i = \overline{1, 5} \Rightarrow N_i \geq \left[\frac{\ln(1 - \beta)}{\ln \rho_i} \right] - 1, \quad i = \overline{1, 5}$$

Пусть $\alpha_i = 0,9$. Тогда

$$\lambda_1 = \lambda = 20; \quad \lambda_2 = \alpha_1 \lambda_1 = 18; \quad \lambda_3 = \alpha_2 \alpha_1 \lambda_1 = 16,2;$$

$$\lambda_4 = \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \lambda_1 = 14,58; \quad \lambda_5 = \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \lambda_1 = 13,12.$$

Так как $\mu_i = \mu = 30$ в час, то

$$\rho_1 = 0,67; \quad \rho_2 = 0,6; \quad \rho_3 = 0,54; \quad \rho_4 = 0,486; \quad \rho_5 = 0,437.$$

Задачи к §3.6

3.6.1. В примере 3.6.1 предположим, что обслуживающая система располагает тремя работающими последовательно узлами. Провести анализ этой модели с теми же исходными данными.

§3.7. Подготовка исходных данных и проверка гипотез

Как мы отмечали выше, выбор метода для исследования функциональных характеристик системы определяется законами распределения моментов поступления клиентов и продолжительности обслуживания. Чтобы установить характер распределения, необходимо осуществить наблюдения за реально

функционирующей системой и зарегистрировать ряды чисел, получаемых в ходе наблюдений. При этом возникают вопросы:

- 1) *когда* осуществлять наблюдения?
- 2) *каким образом* систематизировать данные?

Любая система массового обслуживания характеризуется так называемыми периодами *повышенной загрузки*, поэтому лучше осуществлять наблюдения в течение таких периодов.

Сбор данных можно осуществить следующими способами:

Способ 1: путем регистрации временных интервалов между последовательными поступлениями клиентов и последовательными выходами обслуженных клиентов из системы;

Способ 2: путем подсчета числа поступивших в единицу времени клиентов на обслуживание и числа выходящих из системы в единицу времени обслуженных клиентов.

После этого необходимо систематизировать и обобщить данные с тем, чтобы получить возможность построить в результате интересующие исследования распределения вероятностей (См. Математическую статистику).

Задачи к §3.7

3.7.1. В таблице приведены значения частоты ni появления события, заключающегося в том, что число поступлений заявок на обслуживание в течение часа равняется i :

Xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ni	6	10	9	4	8	9	4	3	2	0

Проверьте, можно ли принять гипотезу о том, что входной поток является пуассоновским. Если данная гипотеза не отвергается, то покажите, какой конкретный вид будет иметь функция распределения вероятностей, которую можно использовать для анализа процесса $X(t)$ – число заявок в момент t .

§3.8. Принятие решений с использованием моделей массового обслуживания

Сначала рассмотрим модели со стоимостными характеристиками. Такие модели массового обслуживания направлены на определение такого уровня функционирования обслуживающих систем, при котором достигается «компромисс» между следующими двумя экономическими показателями: прибылью, получаемой за счет предоставления услуг; потерями прибыли, обусловленными задержками в предоставлении услуг.

Рассматривается два типа моделей:

Модели 1-го типа ориентированы на определение оптимальной средней интенсивности обслуживания μ , когда система массового обслуживания располагает одним прибором;

Модели 2-го типа направлены на определение оптимального числа обслуживающих приборов в случае многоканальной системы массового обслуживания.

Оптимальная интенсивность обслуживания μ .

Пусть в системе с одним прибором интенсивность поступлений λ , а интенсивность обслуживания μ . Предположим, что μ поддается регулированию; требуется определить её оптимальное значение на основе стоимости модели. Введем обозначения:

C_1 – выраженный в стоимостной форме выигрыш за счет увеличения на единицу значения μ в течении единичного интервала времени (например за 1 час);

C_2 – «цена» ожидания (т.е. потери, обусловленные вынужденным ожиданием) в единицу времени и в расчете на одного клиента;

$C(\mu)$ – стоимостной показатель, определяемый формулой:

$$C(\mu) = C_1\mu + C_2EX,$$

μ - непрерывная величина, поэтому оптимальное значение находится из равенства к нулю первой производной $C(\mu)$ по μ .

Например, для $\langle M|M|1 \rangle$ (с очередью):

$$C(\mu) = C_1\mu + C_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$(C(\mu))' = C_1 + \lambda C_2 \frac{1}{(\mu - \lambda)^2} = 0$$

Следовательно

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{C_2\lambda}{C_1}}$$

Как видно, μ (оптимальное) зависит от λ . Это логично, если это было бы не так, то ρ могло бы быть больше 1.

Для системы $\langle M|M|1 \rangle$ (очередь $\leq N$)

$$C(\mu) = C_1 \cdot \mu + C_2 \cdot EX + C_3 \cdot N + C_4 \cdot \lambda p_N,$$

где C_3 – «стоимость» увеличения (на единицу времени) вместимости блока ожидания, C_4 – экономические потери, связанные с невозможностью включить в блок ожидания системы еще одного нуждающегося в обслуживании клиента. Заметим, что λp_N – число клиентов, потерянных системой в единицу времени.

Получить решение этой задачи в явном виде невозможно. Необходимы соответствующие численные методы.

Оптимальное число обслуживающих приборов.

Рассмотрим многоканальную систему массового обслуживания (допустим m – приборов). Пусть λ , μ – фиксированы. Пусть $C(m) = C_1 m + C_2 EX$, где C_1 – отнесенные к единице времени затраты на обеспечение функционирования одного дополнительного обслуживающего прибора, EX – среднее число клиентов. Так как m – дискретно, то дифференцировать нельзя. Оптимальное значение m может быть найдено путем выполнения условий:

$$C(m-1) \geq C(m)$$

$$C(m+1) \geq C(m)$$

$$EX(m) - EX(m+1) \leq C_1/C_2 \leq EX(m-1) - EX(m),$$

где $EX(m)$ – среднее число клиентов в системе с m -приборами.

В заключение, несколько слов о **моделях**, в которых осуществляется **учет предпочтительного уровня обслуживания**.

Заметим, что в таких моделях при определении оптимального числа приборов учитывается то, что «конкурирующими» являются показатели: средняя продолжительность ожидания Eq и доля времени P_0 , в течении которого обслуживающий прибор простаивает. Эти показатели и определяют потенциальный характер процесса массового обслуживания. Обозначим верхние пределы Eq и P_0 через α и β соответственно. Учет предпочтительности уровня функционирования обслуживающей системы можно представить математически так:

определим число m так, чтобы $Eq \leq \alpha$ и $P_0 \leq \beta$.

Задачи к §3.8

3.8.1. Бутылки с фруктовым соком поступают на автоматическую линию в соответствии с пуассоновским распределением вероятностей со средней интенсивностью 10 партий в день. В конце конвейера бутылки закупориваются автоматическим устройством. Установлено, что увеличение производительности на одну единицу обойдется фирме в \$100 в неделю. Задержка же в выполнении указанной выше технологической операции приведет к сокращению объема производства; при этом экономические потери из расчета на одну партию бутылок равняются \$200 в неделю. Определите оптимальную скорость работы автомата.

3.8.2. В цехе промышленного предприятия имеется 10 одинаковых станков. Каждый час работы станка обеспечивает прибыль, равную \$4. Поломка каждого станка за семичасовой

период времени происходит в среднем один раз. Один механик тратит на ремонт станка в среднем четыре часа, хотя фактически наблюдаемые продолжительности ремонта одного станка распределены по показательному закону. Механик, осуществляющий ремонт станков, получает \$6 в час. Определите

а) число механиков, обеспечивающих минимизацию суммарных экономических потерь;

б) число механиков, которое необходимо для того, чтобы среднее количество простаивающих из-за неисправности станков было меньше четырех;

в) число механиков, при котором среднее время простоя станка из-за возникновения в нем неисправности не превышало четырех часов.

Библиографический список

1. Таха Х. Исследование операций. Изд.дом Вильямс., 2005.
2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. (гл. 1-2)
3. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979.
4. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Издательство Наука, 1984.
5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. М.: Изд. БЕК, 2002.
6. Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977.
7. Мур Дж., Уедерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel . Из.дом Вильямс, 2004.
8. Джафаров К.А., Могульский А.А. Элементы теории массового обслуживания. Изд-во НГТУ, 1997.
9. Джафаров К.А. Логистика. Учебное пособие. Н.: Изд.СибУПК, 2005.

10. Джафаров К.А., Федоров А.А. Игровые модели экономических ситуаций. Н.: Изд.НГТУ, 2010.